Algoritmica 07/08
4. TEOREMA PRINCIPALE SULLE RICORRENZE

Con questo teorema si calcola, in ordine di grandezza Θ (dunque esatto) e in funzione di n, il valore di una funzione definita attraverso un'equazione di ricorrenza della forma:

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$, ove a,b sono costanti.

È questa l'equazione tipica che descrive la complessità in tempo T(n) di un algoritmo ricorsivo che chiama a volte sé stesso su sottoinsiemi di dati di dimensione n/b, e richiede un tempo addizionale f(n) per la divisione dei dati in sottoinsiemi e per la combinazione dei risultati delle singole chiamate ricorsive per ottenere il risultato finale. Poiché il teorema fornisce il risultato per T(n) in ordine di grandezza, anche f(n) esprimerà il tempo suddetto in ordine di grandezza.

Per esempio la procedura MERGESORT chiama ricorsivamente sé stessa due volte (a=2) su n/2 dati (b=2), e richiede tempo costante per stabilire la divisione del vettore per le due chiamate ricorsive, e tempo lineare in n per la procedura FUSIONE che combina i risultati di quelle chiamate. Dunque, complessivamente e in ordine di grandezza, f(n)=dn con d costante.

Teorema principale

Sia T(n) una funzione positiva non decrescente definita dalla relazione:

$\mathbf{T(n) = aT(n/b) + f(n)}$

ove $a \geq 1, b > 1$ sono costanti intere e n/b indica indifferentemente $\lceil n/b \rceil$ oppure $\lfloor n/b \rfloor$. E sia $\mathbf{k = \log_b a}$. La relazione ha soluzione:

1. se $f(n) \in O(n^{k-\varepsilon})$ per qualche $\varepsilon>0$, allora $\mathbf{T(n) \in \Theta(n^k)}$;
2. se $f(n) \in \Theta(n^k)$, allora $\mathbf{T(n) \in \Theta(n^k \log n)}$;
3. se $f(n) \in \Omega(n^{k+\varepsilon})$ per qualche $\varepsilon>0$, e se $af(n/b)<cf(n)$ per qualche $c<1$ e $n \rightarrow \infty$, allora $\mathbf{T(n) \in \Theta(f(n))}$.

All'esame è richiesta un'approfondita comprensione del significato del teorema e del suo impiego, ma non è richiesta la dimostrazione che si può comunque trovare nel testo B, par. 4.3, ove il teorema è detto "dell'esperto".

Nel caso di MERGESORT abbiamo $k=\log_b a=\log_2 2=1$; quindi $n^k=n$, dello stesso ordine di grandezza di f(n)=dn. Si applica quindi il caso 2 del teorema ottenendo, come già detto, $T(n) \in \Theta(n \log n)$.