DA "F. LUCCIO: LA STRUTTURA DEGLI ALGORITMI" BORINGHIERI 1982

Fibonacci, è di grande importanza nella matematica discreta e mostra inaspettate relazioni con altre fondamentali successioni numeriche e con le frazioni continue (vedi per esempio Vorobyov, 1965, per un agile e tuttavia approfondito studio in merito).

LA FORMULA DI BINET

Il problema dei conigli. Al mese 1, origine dei tempi, vi è una coppia di conigli neonati. Al mese successivo la coppia, divenuta adulta, inizia il processo di riproduzione: ogni coppia genera una nuova coppia ogni mese, ma ogni nuova coppia non è in grado di procreare durante il primo mese di vita. Quante coppie vi sono al mese n?

Il numero cercato si indica con F_n, ed è l'n-esimo numero di Fibonacci. Al mese 1 vi è una coppia: $F_1=1$. La coppia non può procreare nel suo primo mese di vita, quindi al mese 2 vi è sempre solo tale coppia, $F_2=1$. Ora però la coppia può generarne una nuova, e al mese 3 vi sono $F_3=2$ coppie. Durante il quarto mese l'ultima coppia nata non è ancora fertile, quindi solo la coppia originale si riproduce e alla scadenza del quarto mese genera un'altra coppia, per cui si ha $F_4=3$.

Generalizzando il processo, al mese n vi sono le coppie presenti al mese precedente (F_{n-1}), più quelle generate nell'ultimo mese. Queste sono in numero pari alle coppie fertili al mese $n-1$, che sono quelle esistenti al mese ancora precedente (F_{n-2}). Abbiamo in conclusione la relazione di ricorrenza

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, \qquad [5.1]$$

che completata dalle condizioni iniziali

$$F_1=1, \quad F_2=1, \qquad [5.1']$$

fornisce la successione dei numeri di Fibonacci. Le condizioni iniziali sono spesso poste nella forma

$$F_0=0, \quad F_1=1, \qquad [5.1'']$$

che non è interpretabile in termini di conigli, ma dà origine alla stessa successione.

matico europeo del Medioevo. Il suo *Liber abaci*, scritto nel 1202 e pervenutoci nella edizione del 1228, è una *summa* delle conoscenze algebriche del tempo.

Dalle relazioni precedenti possiamo derivare immediatamente i primi numeri di Fibonacci, che sono

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}	F_{19}
55	89	144	233	377	610	986	1597	2584	4181

Cerchiamo ora una soluzione per la relazione [5.1], cioè cerchiamo di esprimere F_n in funzione di n. La legge generale che risolve la [5.1] conterrà delle costanti da determinare imponendo le condizioni iniziali.

Ammettiamo che vi sia una soluzione del tipo

$$F_n=cz^n,$$

ove c e z sono costanti. Sostituendo questa forma nella relazione [5.1] otteniamo

$$cz^n=cz^{n-1}+cz^{n-2},$$

da cui

$$cz^{n-2}(z^2-z-1)=0.$$

Possiamo quindi affermare che cz^n è una soluzione della [5.1] se: $c=0$, oppure $z=0$, oppure $z^2-z-1=0$. Le prime due condizioni sono banali, poiché implicano $F_n=0$ per ogni n. La condizione $z^2-z-1=0$ è soddisfatta dai valori

$$z_1=(1/2)(1+\sqrt{5})\cong 1{,}618, \quad z_2=(1/2)(1-\sqrt{5})\cong -0{,}618, \qquad [5.2]$$

quindi la relazione [5.1] ammette le due soluzioni

$$F_n=c_1z_1^n, \qquad [5.3]$$

$$F_n=c_2z_2^n, \qquad [5.3']$$

ove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie; z_1 e z_2 sono i valori forniti dalle [5.2].

Queste soluzioni non sono ancora singolarmente in grado di generare la successione di Fibonacci: esse infatti contengono una sola costante libera (c_1 o c_2), e non possono soddisfare due condizioni iniziali (le condizioni espresse nelle [5.1'] o nelle [5.1'']). Notiamo però che in virtù della linearità della relazione [5.1], una combinazione lineare di sue soluzioni è ancora una soluzione. In particolare

$$F_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n \qquad [5.4]$$

è una soluzione (ed è possibile dimostrare che è la più generale soluzione).

Imponendo ora le condizioni iniziali [5.1''] possiamo determinare i valori di c_1 e c_2:

$$c_1 z_1^0 + c_2 z_2^0 = F_0 = 0,$$
$$c_1 z_1^1 + c_2 z_2^1 = F_1 = 1,$$

ovvero

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$(1/2)(1+\sqrt{5})c_1 + (1/2)(1-\sqrt{5})c_2 = 1.$$

E' questo un sistema di due equazioni lineari in due incognite, la cui soluzione è

$$c_1 = 1/\sqrt{5},$$
$$c_2 = -1/\sqrt{5}.$$

In conclusione, la successione di Fibonacci definita dalle relazioni [5.1] e [5.1''] (o [5.1']) ha soluzione

$$F_n = (1/\sqrt{5})z_1^n - (1/\sqrt{5})z_2^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \qquad [5.5]$$

La [5.5] è detta *formula di Binet*, dal nome del matematico che primo la escogitò. Dal suo esame notiamo subito che il primo termine $(1/\sqrt{5})z_1^n$ è prevalente. In effetti, tale termine è crescente con n, poiché $z_1 > 1$; invece il termine $(1/\sqrt{5})z_2^n$ ha modulo decrescente, poiché $|z_2| < 1$.

Più precisamente, possiamo affermare

$$F_n = \left\{(1/\sqrt{5})z_1^n\right\} = \left\{(1/\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}, \quad \text{per} \quad n \geqslant 1, \qquad [5.6]$$

ove $\{x\}$ indica qui l'intero più prossimo a x.[2] Infatti abbiamo dalla [5.5]

[2] Il valore $z_1 = (1/2)(1+\sqrt{5})$, le cui successive potenze generano i numeri di Fibonacci, è noto nella geometria antica come ***sezione aurea***. Esso si incontra nella determinazione dei medi proporzionali tra segmenti, e ha avuto tradizionale importanza nella scelta di forme architettoniche armoniose.

$$|F_n - (1/\sqrt{5})z_1^n| = |(1/\sqrt{5})z_2^n| < 1/2, \quad \text{per ogni} \quad n \geqslant 1,$$

da cui segue la [5.6].

Dalla [5.6] possiamo ricavare approssimazioni di precisione voluta; per esempio:

$$F_n \cong \{0{,}447 \times 1{,}618^n\}, \quad n \geqslant 1,$$

dalla quale si ritrovano esattamente tutti i valori fino a F_{16} (vedi tabulazione precedente).

5.1.1 Il caso generale. La relazione di Fibonacci è un caso particolare di relazione di ricorrenza *lineare, omogenea, a coefficienti costanti* (attributi che si spiegano da soli), di ordine 2. In genere una tale relazione *di ordine costante* k ha la forma

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_k x_{n-k}, \qquad [5.7]$$

ove le a_i sono costanti assegnate. Essa deve essere risolta con k condizioni iniziali, che specificano k consecutivi valori di x_i per valori assegnati dell'indice; per esempio

$$x_i = d_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1, \qquad [5.7']$$

ove le d_i sono costanti.

Il modo di risoluzione è lo stesso adottato per la relazione di Fibonacci. Si cercano soluzioni della forma $x_n = cz^n$; sostituita questa funzione nella [5.7], si ottiene

$$cz^{n-k}\left(z^k - \sum_1^k{}_i a_i z^{k-i}\right) = 0$$

da cui emerge, come unica condizione interessante, l'equazione algebrica di grado k

$$z^k - \sum_1^k{}_i a_i z^{k-i} = 0. \qquad [5.8]$$

Questa equazione ha k radici (reali o complesse) $z_1, z_2, \dots, z_k$, cui corrispondono k soluzioni della [5.7], del tipo

$$x_n = c_j z_j^n, \quad 1 \leqslant j \leqslant k, \qquad [5.9]$$

ove le c_j sono costanti da determinare.

Se le z_j sono *tutte distinte* tra loro, la soluzione più generale della [5.7]