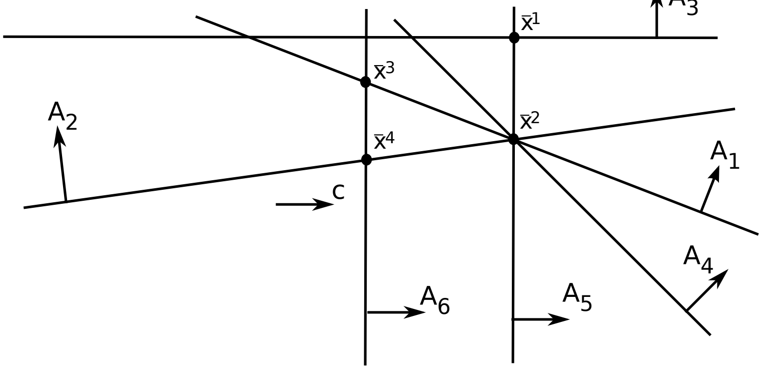
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2014/15)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva graficamente il problema di PL in figura utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{\ 3\ ,\ 5\ \}$; si noti che c, A_5 ed A_6 sono collineari. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e η_B e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base determinate. Al termine, in caso di ottimo finito si discuta l'unicità delle soluzioni primali e duali ottime determinate.



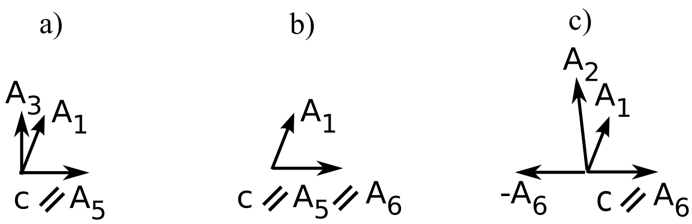
SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{\ 3\ ,\ 5\ \}$. La soluzione primale di base $\bar{x}^1$ viola i vincoli 1, 2, 4 e 6, pertanto $k = \min\{1, 2, 4, 6\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland. $\bar{y}_3 = 0$ e $\bar{y}_5 > 0$ in quanto c è collineare con A_5; quindi la base è duale degenere, mentre è primale non degenere poiché $B = I(\bar{x}^1)$. Poiché $A_1 \in \text{cono}(A_3, A_5)$, come mostrato in figura (a), risultano $\eta_3 > 0$ e $\eta_5 > 0$. Essendo $\{1, 5\}$ una base ammissibile, mentre $\{1, 3\}$ non lo è, come è immediato verificare geometricamente, deve necessariamente risultare $\bar{y}_5/\eta_5 > \bar{y}_3/\eta_3$. Infatti $\bar{y}_3 = 0$, e quindi $\bar{y}_3/\eta_3 = 0$, mentre $\bar{y}_5/\eta_5 > 0$. Pertanto $h = 3$.

it. 2): $B = \{\ 1\ ,\ 5\ \}$. La soluzione primale di base $\bar{x}^2$ viola il solo vincolo 6, pertanto $k = 6$. $\bar{y}_1 = 0$ e $\bar{y}_5 > 0$ in quanto c è collineare con A_5; quindi la base è ancora duale degenere, ed è anche primale degenere poiché $I(\bar{x}^2) = \{1, 2, 4, 5\} \supset B$. Poiché A_6 è collineare ad A_5 risulta necessariamente $\eta_5 > 0$ ed $\eta_1 = 0$; pertanto, $h = 5$.

it. 3): $B = \{\ 1\ ,\ 6\ \}$. La soluzione primale di base $\bar{x}^3$ viola il solo vincolo 2, pertanto $k = 2$. $\bar{y}_1 = 0$ e $\bar{y}_6 > 0$ in quanto c è collineare con A_6; quindi la base è ancora duale degenere, mentre è primale non degenere poiché $B = I(\bar{x}^3)$. Poiché $A_2 \in \text{cono}(A_1, -A_6)$, come mostrato in figura (c), risultano $\eta_1 > 0$ e $\eta_6 < 0$; pertanto, $h = 1$.

it. 4): $B = \{\ 2\ ,\ 6\ \}$. La soluzione primale di base $\bar{x}^4$ non viola alcun vincolo: pertanto l'algoritmo termina avendo determinato una coppia di soluzioni ottime. $\bar{y}_2 = 0$ e $\bar{y}_6 > 0$ in quanto c è collineare ad A_6; quindi la base è duale degenere, ma è ancora primale non degenere poiché $B = I(\bar{x}^4)$.



Poiché la base ottima è primale non degenere, la soluzione duale ottima è unica. Infatti, tutte le soluzioni duali ottime devono rispettare le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}^4$, e quindi necessariamente essere identiche alla soluzione duale di base. Viceversa, essendo la base ottima duale degenere, la soluzione primale può non essere unica, ed infatti questo accade. Tutte le soluzioni della faccia identificata dal vincolo A_6, di cui $\bar{x}^4$ è un vertice, sono ottime per il problema primale.

2) Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{lrrrcl}
\max & 4x_1 & -\alpha x_2 & & & \\
 & & x_2 & -x_3 & = & 0 \\
 & x_1 & & -x_3 & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & -x_1 & +x_2 & & \leq & 4 \\
 & & & x_3 & \leq & 7 \\
 & x_1 & & & \geq & 0
\end{array} ,
$$

se ne scriva il duale e, utilizzando il teorema debole della dualità, si individuino i valori del parametro α per cui la soluzione $x^* = (2, 1, 1)$ è ottima per il problema.

SVOLGIMENTO

Il duale del problema è:

$$
\begin{array}{lrrrrrcr}
\min & & y_2 & +2y_3 & +4y_4 & +7y_5 & & \\
 & & y_2 & +y_3 & -y_4 & & \geq & 4 \\
 & y_1 & & & +y_4 & & = & -\alpha \\
 & -y_1 & -y_2 & & & +y_5 & = & 0 \\
 & & y_2 & & & & \geq & 0 \\
 & & & y_3 & & & \geq & 0 \\
 & & & & y_4 & & \geq & 0 \\
 & & & & & y_5 & \geq & 0
\end{array} .
$$

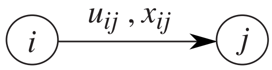
Vogliamo determinare soluzioni duali ammissibili $y(\alpha)$ che certifichino che $x^* = (2, 1, 1)$ è ottima per il problema; per questo è necessario (e sufficiente) che abbiano costo $y(\alpha)b = cx^* = 8 - \alpha$.

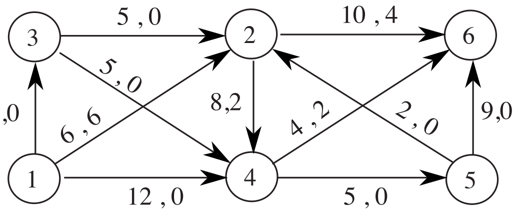
Verificando i vincoli del primale, notiamo che i primi tre vincoli sono soddisfatti come uguaglianza da x^*, mentre gli altri due sono soddisfatti come stretta disuguaglianza ($-2 < 4$, $1 < 7$); dal teorema degli scarti complementari segue che deve risultare $y_4(\alpha) = y_5(\alpha) = 0$.

Dal secondo vincolo del duale otteniamo quindi $y_1(\alpha) = -\alpha$, ed usando questo nel terzo vincolo otteniamo $y_2(\alpha) = \alpha$. Utilizzando il primo vincolo del duale possiamo quindi concludere che deve risultare $y_3(\alpha) \geq 4 - \alpha$. Imponendo la relazione $y(\alpha)b = y_2(\alpha) + 2y_3(\alpha) = cx^* = 8 - \alpha$, si ottiene quindi $y_3(\alpha) = 4 - \alpha$.

Imponendo $y_3(\alpha) \geq 0$ e $y_2(\alpha) \geq 0$, segue che α può assumere valori in $[0, 4]$. Quindi, esistendo soluzioni duali ammissibili, con valore della funzione obiettivo uguale al valore di cx^*, solo per $\alpha \in [0, 4]$, segue che x^* è ottima solo per tali valori del parametro.

3) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso riportato, di valore $v = 6$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità.

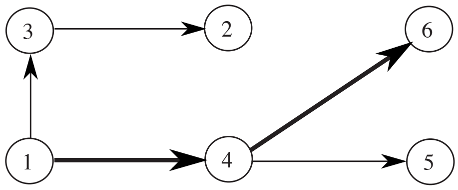




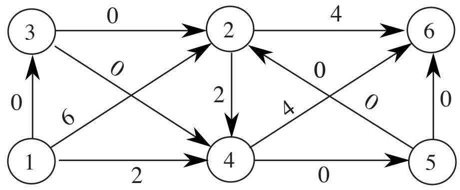
SVOLGIMENTO

Le iterazioni sono rappresentate di seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita ed il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio lungo P di un flusso pari alla capacità $\theta(P, x)$, con il relativo valore v. Alla quinta iterazione la visita non raggiunge $t = 6$. L'albero della visita individua il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 4\}, \{2, 3, 5, 6\})$, che è di capacità minima. Infatti $u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{13} + u_{45} + u_{46} = 6 + 2 + 5 + 4 = 17 = v$.

it. 1)

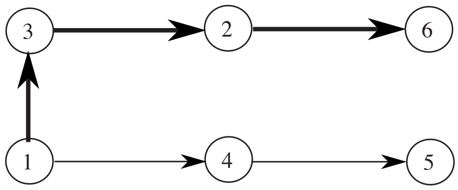


$\theta(P, x) = 2$

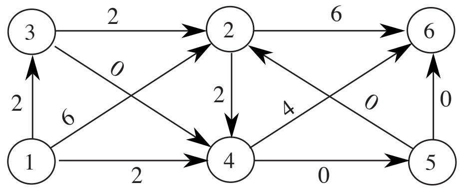


$v = 8$

it. 2)

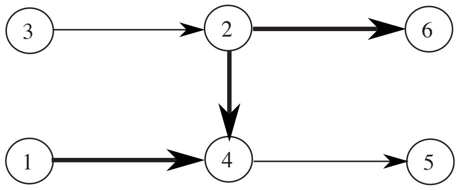


$\theta(P, x) = 2$

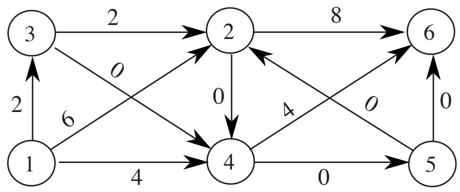


$v = 10$

it. 3)

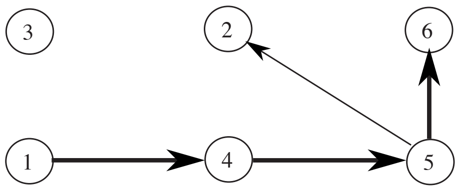


$\theta(P, x) = 2$

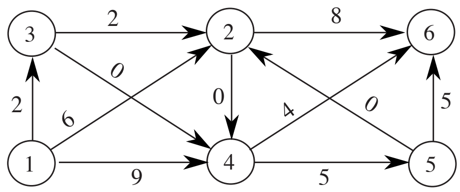


$v = 12$

it. 4)

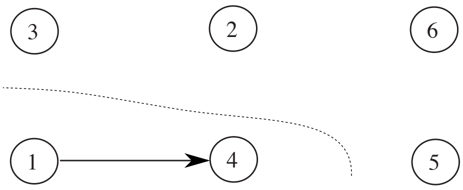


$\theta(P, x) = 5$



$v = 17$

it. 5)



4) Si consideri il problema di minimizzare il costo mensile di stoccaggio $c(x)$ di un'azienda, che vale 0 nel caso in cui la quantità x di merce stoccata in magazzino sia compresa tra 0 e 20 bancali, ed è invece definito dalla funzione lineare $80 + 3x$ nel caso in cui il numero x di bancali stoccati sia maggiore di 20 e minore o uguale della capacità del magazzino, che è pari a 200 bancali. Per esigenze di produzione l'azienda necessita di stoccare almeno B bancali al mese. Si formuli in termini di P.L.I., e si dimostri la correttezza della formulazione proposta.

SVOLGIMENTO

Il costo di stoccaggio dell'azienda è definito come:

$$c(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq 20, \\ 80 + 3x, & \text{se } 20 < x \leq 200. \end{cases}$$

$c(x)$ è una funzione a carico fisso, da minimizzare. Il problema può quindi essere formulato introducendo una variabile decisionale y che distingua il caso in cui il numero x di bancali in magazzino appartenga al primo intervallo, vale a dire $0 \leq x \leq 20$ $(y = 0)$, dal caso in cui il numero di bancali appartenga all'intervallo $20 \leq x \leq 200$ $(y = 1)$. Introduciamo inoltre una variabile z_1, che descrive la quantità di stock x nel primo intervallo, ed una variabile z_2, che descrive la quantità di stock x nel secondo intervallo. Utilizzando tali variabili decisionali, il problema può essere formulato nel modo seguente:

$$\begin{aligned} (P) \quad \min \quad & 80y + 3z_2 \\ & 0 \leq z_1 \leq 20(1 - y) \\ & 20y \leq z_2 \leq 200y \\ & z_1 + z_2 \geq B \\ & y \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Il legame tra x, z_1 e z_2 è implicitamente espresso da $x = z_1 + z_2$. I vincoli $0 \leq z_1 \leq 20(1 - y)$ e $20y \leq z_2 \leq 200y$ esprimono il legame tra la variabile y e le variabili z_1 e z_2: se $y = 0$, allora $0 \leq z_1 \leq 20$ mentre $z_2 = 0$; se invece $y = 1$, allora $z_1 = 0$ mentre $20 \leq z_2 \leq 200$. Il vincolo $z_1 + z_2 \geq B$ impone che la quantità stoccata sia maggiore o uguale a B. La funzione obiettivo, da minimizzare, è $g(z_1, z_2, y) = 80y + 3z_2$.

Dimostrazione di correttezza

Quando $y = 0$ si ha $0 \leq z_1 \leq 20$ mentre $z_2 = 0$: la quantità x di merce in magazzino varia quindi nel primo intervallo $(x = z_1)$. Il corrispondente valore della funzione obiettivo è $g(z_1, 0, 0) = 0$, in accordo con $c(x)$.

Quando invece $y = 1$ si ha $z_1 = 0$ mentre $20 \leq z_2 \leq 200$: la quantità x di merce in magazzino varia quindi nel secondo intervallo $(x = z_2)$. In corrispondenza di tali valori la funzione obiettivo assume l'andamento lineare $g(0, z_2, 1) = 80 + 3z_2$, vale a dire $80 + 3x$, in accordo con $c(x)$ per $x > 20$. Osserviamo che il punto di discontinuità, $x = 20$, è rappresentato in (P) in modo duplice:

- $(z_1, z_2, y) = (20, 0, 0)$: in tal caso $g(20, 0, 0) = c(20) = 0$;
- $(z_1, z_2, y) = (0, 20, 1)$: in tal caso $g(0, 20, 1) = 140 > c(20) = 0$;

$(z_1, z_2, y) = (0, 20, 1)$ non è pertanto una rappresentazione corretta di $x = 20$. Tuttavia poichè $g(z_1, z_2, y)$ viene minimizzata, e $g(0, 20, 1) = 140 > g(20, 0, 0) = 0$, la rappresentazione $(z_1, z_2, y) = (0, 20, 1)$ non può costituire la soluzione ottima, e quindi l'ambiguità della rappresentazione di $x = 20$ è risolta a livello di ottimizzazione. (P) è quindi una rappresentazione corretta del problema.

5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$(P) \quad \max\{\ cx\ :\ Ax \leq b,\ x \geq 0\ \}.$$

Supponiamo che il sistema

$$(S) \quad \begin{cases} A\xi & \leq & 0 \\ \xi & \geq & 0 \\ c\xi & > & 0 \end{cases}$$

ammetta una soluzione $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che se (P) è non vuoto, allora è superiormente illimitato.

SVOLGIMENTO

Sia $\bar{x}$ una qualsiasi soluzione ammissibile per (P) e consideriamo $x(\lambda) := \bar{x} + \lambda\bar{\xi}$. Tale soluzione risulta essere ammissibile per ogni $\lambda \in \mathbb{R}_+$; infatti:

$$Ax(\lambda) = A\bar{x} + \lambda A\bar{\xi} \leq A\bar{x} \leq b$$

e

$$x(\lambda) = \bar{x} + \lambda\bar{\xi} \geq \bar{x} \geq 0$$

dove le prime disuguaglianze di entrambe le espressioni seguono dal fatto che $\bar{\xi}$ risolve (S) e $\lambda \geq 0$, mentre le seconde dall'ammissibilità di $\bar{x}$. Inoltre, il valore della funzione obiettivo cresce indefinitamente al crescere di λ:

$$cx(\lambda) = c\bar{x} + \lambda c\bar{\xi} \longrightarrow +\infty \quad \text{per} \quad \lambda \longrightarrow +\infty$$

in quanto $c\bar{\xi} > 0$.

$\bar{\xi}$ è quindi una direzione ammissibile di crescita illimitata per (P), che pertanto è superiormente illimitato.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{lrrrrrrcl} \max & 2x_1 & +5x_2 & +9x_3 & +5x_4 & +9x_5 & +1x_6 & & \\ & 3x_1 & +4x_2 & +6x_3 & +2x_4 & +3x_5 & +2x_6 & \leq & 7 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perchè. Si esaminino solamente i primi tre livelli dell'albero delle decisioni (la radice conta come un livello). Al termine si indichi se il problema è stato risolto, oppure quali sono la miglior valutazione superiore ed inferiore disponibili al momento in cui l'esplorazione viene interrotta.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordinamento CUD (Costo Unitario Decrescente) delle variabili è $x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_6$.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [0, 0, 1/3, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 17$, $\bar{x} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\underline{z} = 15$. Poiché $\underline{z} = 15 > z = -\infty$, $z = 15$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_3.

$\boxed{x_3 = 1}$ $x^* = [0, 0, 1, 0, 1/3, 0]$, $\bar{z} = 12$. Siccome $\bar{z} < z = 15$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_3 = 0}$ $x^* = [0, 1/2, 0, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 16 + 1/2$, $\bar{x} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\underline{z} = 15$. Poiché $\underline{z} = 15 = z = 15$, z non cambia. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_2.

$\boxed{x_3 = 0,\ x_2 = 1}$ $x^* = [0, 1, 0, 0, 1, 0]$, $\bar{z} = 14$. Poichè la soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere, il nodo viene chiuso per ottimalità. Sarebbe comunque stato chiuso dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} = 14 < z = 15$.

$\boxed{x_3 = x_2 = 0}$ $x^* = [2/3, 0, 0, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 15 + 1/3$, $\bar{x} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\underline{z} = 15$. Siccome $\bar{z} = 15 + 1/3 > z = 15$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_1.

$\boxed{x_3 = x_2 = 0,\ x_1 = 1}$ $x^* = [1, 0, 0, 1/2, 1, 0]$, $\bar{z} = 13 + 1/2$, Siccome $\bar{z} = 13 + 1/2 < z = 15$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_3 = x_2 = x_1 = 0}$ $x^* = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\bar{z} = 15$. Poichè la soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere, il nodo viene chiuso per ottimalità. Sarebbe comunque stato chiuso dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} = 15 = z = 15$.

Poiché $Q = \emptyset$, l'algoritmo termina: $z = 15$ è il valore ottimo del problema. Si osservi che, essendo i costi interi, il nodo $x_3 = x_2 = 0$ avrebbe potuto essere chiuso dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} = 15 + 1/3$ può essere sostituita, più accuratamente, da $\bar{z} = 15$.