RICERCA OPERATIVA (a.a. 2015/16)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di PL

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & - & 4x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 6 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & -2 \end{array}$$

per via algebrica, mediante l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale della base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito, si discuta se la soluzione ottima primale individuata sia unica, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{3, 4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix} \ , \ y_N = 0 \ , \ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

[base primale degenere e duale non degenere] $h = \min\{\, i \in B \,:\, y_i < 0 \,\} = \min\{3, 4\} = 3$, $B(h) = 1$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \ , \ J = \{\, i \in N \,:\, A_i \xi > 0 \,\} = \{1, 2\}$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i x)/A_i \xi \ , \ \lambda_1 = 3 \ , \ \lambda_2 = 0 \ , \ \bar{\lambda} = \min\{\, \lambda_i \,:\, i \in J \,\} = 0$$

$$k = \min\{\, i \in J \,:\, \lambda_i = \bar{\lambda} \,\} = 2 \quad \text{[cambio di base degenere]}$$

it.2) $B = \{2, 4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \ , \ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

[base primale degenere e duale non degenere] $h = 4$, $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{1\} \ , \ \bar{\lambda} = \lambda_1 = 3 \ , \ k = 1$$

it.3) $B = \{1, 2\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix} \ , \ y = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[base primale non degenere e duale non degenere] $h = 2$, $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{5\} \ , \ \bar{\lambda} = \lambda_5 = 3 \ , \ k = 5$$

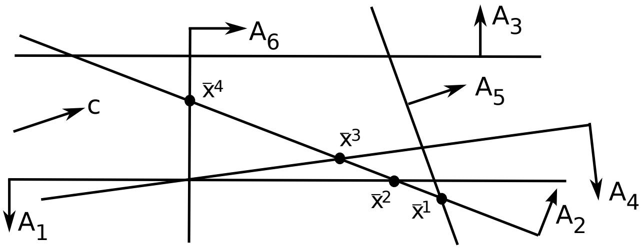
it.4) $B = \{1, 5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \end{bmatrix} \ , \ y = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}$$

[base primale non degenere e duale non degenere]

Poiché $y_B \geq 0$ segue che $x = (1, 0)$ è una soluzione ottima per il problema dato, mentre $y = (7, 0, 0, 0, 3)$ è una soluzione ottima per il suo problema duale. Essendo tale soluzione ottima duale non degenere, segue che $x = (1, 0)$ è l'unica soluzione ottima per il problema primale.

2) Si risolva graficamente il problema di PL in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{2, 5\}$; si noti che c ed A_5 sono collineari. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione di base primale (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e η_B e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base determinate. Al termine, se è stata determinata una soluzione ottima finita se ne discuta l'unicità.



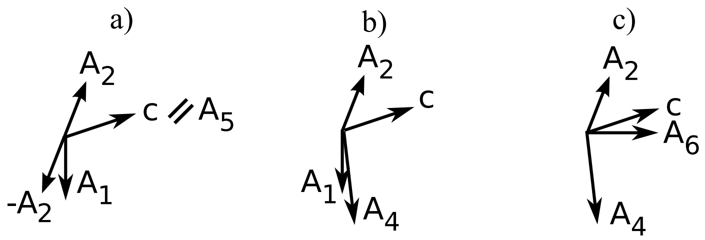
SVOLGIMENTO

it. 1): $B = \{2, 5\}$. La soluzione di base primale $\bar{x}^1$ viola i vincoli 1, 4 e 6, pertanto $k = \min\{1, 4, 6\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland. $\bar{y}_2 = 0$ e $\bar{y}_5 > 0$ in quanto c è collineare con A_5; quindi la base è duale degenere, ed è primale non degenere poiché $B = I(\bar{x}^1)$. Poiché $A_1 \in \text{cono}(-A_2, A_5)$, come mostrato in figura (a), risultano $\eta_2 < 0$ e $\eta_5 > 0$; pertanto $h = 5$.

it. 2): $B = \{1, 2\}$. La soluzione di base primale $\bar{x}^2$ viola i vincoli 4 e 6, pertanto $k = \min\{4, 6\} = 4$ per la regola anticiclo di Bland. $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_2 > 0$ in quanto c è interna a $\text{cono}(A_2, A_4)$, quindi la base è duale non degenere. Risulta anche primale non degenere poiché $B = I(\bar{x}^2)$. Poiché $A_4 \in \text{cono}(A_1, A_2)$, come mostrato in figura (b), risultano $\eta_1 > 0$ e $\eta_2 > 0$. Poichè però $c \in \text{cono}(A_2, A_4)$ ma $c \notin \text{cono}(A_1, A_4)$, deve necessariamente risultare $h = 1$.

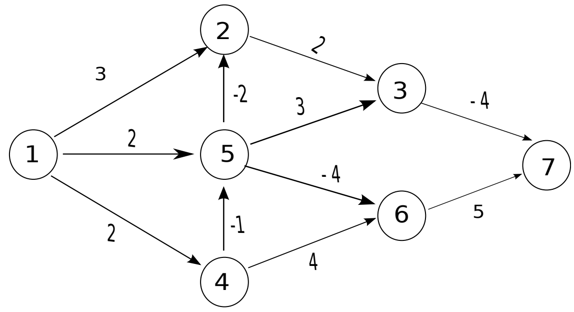
it. 3): $B = \{2, 4\}$. La soluzione di base primale $\bar{x}^3$ viola il solo vincolo 6, pertanto $k = 6$. $\bar{y}_2 > 0$ e $\bar{y}_4 > 0$ in quanto c è interno al cono generato da A_2 e A_6; quindi la base è duale non degenere, ed è anche primale non degenere poiché $B = I(\bar{x}^3)$. Poiché $A_6 \in \text{cono}(A_2, A_4)$, come mostrato in figura (c), risultano $\eta_2 > 0$ e $\eta_4 > 0$. Poichè però $c \in \text{cono}(A_2, A_6)$ ma $c \notin \text{cono}(A_4, A_6)$, deve necessariamente risultare $h = 4$.

it. 4): $B = \{2, 6\}$. $\bar{y}_2 > 0$ e $\bar{y}_6 > 0$ in quanto c è interno al cono generato da A_2 e A_6 (si veda ancora la figura (c)); la base continua ad essere primale e duale non degenere. La soluzione di base primale $\bar{x}^4$ non viola alcun vincolo, e quindi l'algoritmo si ferma avendo determinato una coppia di soluzioni ottime per il primale ed il duale.



Poiché la base ottima è duale non degenere, per il Teorema degli Scarti Complementari la soluzione ottima primale è unica.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato). Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione ottima è unica? Giustificare la risposta.



SVOLGIMENTO

Rinumerando i nodi come segue

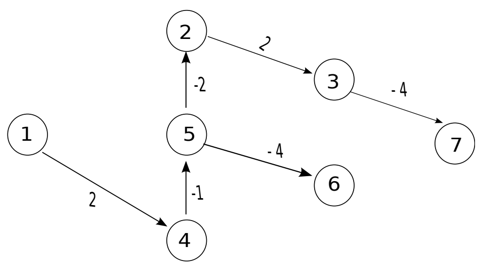
originale	1	2	3	4	5	6	7
rinumerato	1	4	6	2	3	5	7

si dimostra che il grafo è aciclico: infatti, per ogni arco (i, j) del grafo rinumerato risulta $i < j$ (si noti che tale rinumerazione non è unica: la proprietà vale anche rinumerando il nodo 6 in 4 ed il nodo 2 in 5, oppure scambiando l'ordine di numerazione dei nodi 3 e 6). L'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$ (anche in presenza di archi di costo negativo). Nello svolgimento si fa riferimento alla nuova numerazione dei nodi in tabella. Inoltre, non viene riportato Q in quanto non utilizzato da SPT.Acyclic.

$$M = (n-1)\max\{c_{ij} : (i,j) \in A\} + 1 = 6 \times 5 + 1 = 31.$$

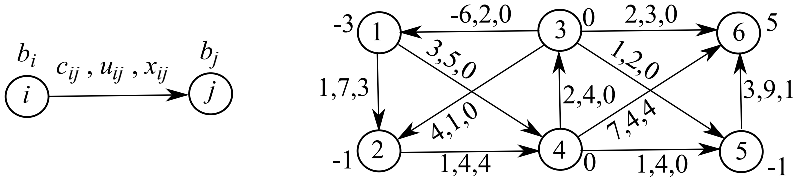
it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$
0		*nil*	1	1	1	1	1	1	0	31	31	31	31	31	31
1	1	*nil*	1	1	1	1	1	1	0	2	2	3	31	31	31
2	2	*nil*	1	2	1	2	1	1	0	2	1	3	6	31	31
3	3	*nil*	1	2	3	3	3	1	0	2	1	-1	-3	4	31
4	4	*nil*	1	2	3	3	4	1	0	2	1	-1	-3	1	31
5	5	*nil*	1	2	3	3	4	5	0	2	1	-1	-3	1	2
6	6	*nil*	1	2	3	3	4	6	0	2	1	-1	-3	1	-3

Albero dei cammini minimi individuato (sul grafo originale):



La soluzione ottima è unica. Infatti ogni arco non appartenente all'albero individuato soddisfa le condizioni di Bellman in forma di disuguaglianza.

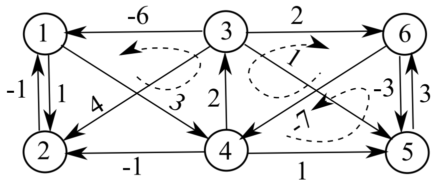
4) Considerando il problema di flusso di costo minimo definito sull'istanza in figura, si verifichi se il flusso riportato, di costo $cx = 38$, sia una soluzione ottima per il problema, giustificando la risposta. Nel caso in cui tale soluzione non sia ottima, si modifichi l'istanza in modo tale che il flusso riportato risulti di costo minimo per l'istanza modificata, giustificando la risposta.

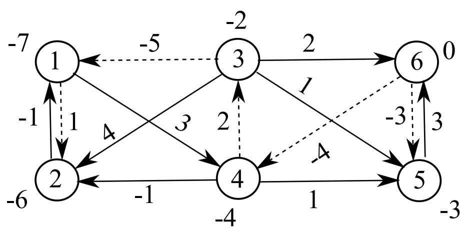


SVOLGIMENTO

Un flusso x è di costo minimo se e solo se non esistono cicli aumentanti di costo negativo, ossia cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo rispetto a x. Nel grafo residuo relativo al flusso riportato in figura sono presenti i tre cicli orientati negativi $C_1 = (4, 5, 6)$, di costo $c(C_1) = -3$, $C_2 = (3, 6, 4)$, di costo $c(C_2) = -3$, e $C_3 = (1, 4, 3)$, di costo $c(C_3) = -1$. C_1 e C_3 sono evidenziati nella figura in alto. Segue che tale flusso non è una soluzione ottima per l'istanza data.

Affinché tale flusso sia ottimo, è sufficiente modificare i costi di alcuni archi del grafo, in modo che il risultante grafo residuo non contenga cicli di costo negativo. Una possibilità è ridurre a 4 il costo dell'arco $(4, 6)$, cancellando in tal modo i cicli C_1 e C_2, e incrementare a -5 il costo dell'arco $(3, 1)$, cancellando in tal modo il ciclo C_3. Il flusso dato risulta ottimo per l'istanza modificata, come mostra la figura in basso al centro, che riporta il grafo residuo ed il corrispondente albero dei cammini minimi (archi tratteggiati) di radice fittizia r (non mostrata in figura). Tale albero è ottimo, come dimostrano le etichette associate ai nodi, che soddisfano le condizioni di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo, ovvero non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto all'ultimo flusso determinato x, che è quindi un flusso di costo minimo per l'istanza modificata.





5) Si applichi l'algoritmo Branch&Bound alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl} \max & x_1 & + & 5x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & + & 10x_5 & + & 2x_6 & & \\ & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & + & 3x_6 & \leq & 8 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

utilizzando il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, eseguendo il branching sulla variabile frazionaria, visitando l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visitando per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se viene eseguita) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si esaminino solamente i primi tre livelli dell'albero delle decisioni (la radice conta come un livello); al termine si indichi se il problema è stato risolto, oppure quali sono la miglior valutazione superiore ed inferiore disponibili al momento in cui l'esplorazione viene interrotta.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordinamento CUD (Costo Unitario Decrescente) delle variabili è $x_5, x_4, x_3, x_2, x_6, x_1$.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [0, 0, 1/2, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 20 + 1/2$, $\bar{x} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\underline{z} = 17$. Poiché $\underline{z} = 17 > -\infty = z$, $z = 17$. Siccome $\bar{z} = 20 + 1/2 > 17 = z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_3.

$\boxed{x_3 = 1}$ $x^* = [0, 0, 1, 0, 2/3, 0]$, $\bar{z} = 17 + 2/3$. $\bar{x} = [0, 0, 1, 1, 0, 0]$, $\underline{z} = 16$. Poiché $\underline{z} = 16 < 17 = z$, z non cambia. Si noti che si può porre $\bar{z} = 17$ in quanto tutti i costi sono interi, e quindi anche il valore ottimo è intero. Poiché $\bar{z} = 17 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_3 = 0}$ $x^* = [0, 3/4, 0, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 18 + 3/4$, $\bar{x} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\underline{z} = 17$. Poiché $\underline{z} = 17 \leq 17 = z$, z non cambia. Siccome $\bar{z} = 18 + 3/4 > 17 = z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_2.

$\boxed{x_3 = 0,\ x_2 = 1}$ $x^* = [0, 1, 0, 1/2, 1, 0]$, $\bar{z} = 17 + 1/2$. $\bar{x} = [0, 1, 0, 0, 1, 0]$, $\underline{z} = 15$. Poiché $\underline{z} = 15 < 17 = z$, z non cambia. Anche in questo caso si può porre $\bar{z} = 17$ in quanto tutti i costi sono interi, e quindi anche il valore ottimo è intero. Poiché $\bar{z} = 17 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_3 = x_2 = 0}$ $x^* = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\bar{z} = 17$. Poichè la soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere, il nodo viene chiuso per ottimalità (senza bisogno di eseguire l'euristica). Sarebbe comunque stato chiuso dalla valutazione superiore in quanto $\bar{z} = 17 \leq 17 = z$.

Poiché Q è vuota, l'algoritmo Branch&Bound termina, restituendo la soluzione ottima $[0, 0, 0, 1, 1, 1]$, di costo 17.

6) Data la coppia asimmetrica di problemi di PL:

$$(\mathrm{P})\ \max\{cx : Ax \leq b\} \text{ e } (\mathrm{D})\ \min\{yb : yA = c, y \geq 0\},$$

dimostrare che, se durante un'iterazione dell'algoritmo del Simplesso Primale, relativa ad una data base B, si ottiene $A_N\xi \leq 0$, allora (D) risulta vuoto.

SVOLGIMENTO

La direzione determinata dall'algoritmo è $\xi = -A_B^{-1}u_{B(h)}$, dove A_B è la matrice di base, h è l'indice uscente dalla base, $B(h)$ è la posizione che A_h occupa nella matrice A_B, e $u_{B(h)}$ è il vettore a n dimensioni che ha tutte le componenti nulle salvo quella di posizione $B(h)$, che ha valore 1.

Pertanto, la direzione ξ è tale che $A_i\xi = 0$, per ogni $i \in B \setminus \{h\}$, mentre $A_h\xi = -1$; inoltre, la variabile duale $\bar{y}_h$, corrispondente all'indice h uscente di base, è negativa, cioè:

$$\bar{y}_h = cA_B^{-1}u_{B(h)} < 0.$$

La direzione ξ è di crescita per il problema (P); infatti:

$$c\xi = -cA_B^{-1}u_{B(h)} = -\bar{y}_h > 0.$$

Inoltre, le proprietà della direzione ξ sopra mostrate e l'ipotesi che $A_N\xi \leq 0$ implicano che $A\xi \leq 0$.

Indicando con $\bar{x}$ la soluzione di base primale associata alla base B, si consideri $x(\lambda) = \bar{x} + \lambda\xi$, ovvero il fascio di soluzioni primali, parametriche in λ, ottenute spostandosi lungo la direzione ξ. Sotto le ipotesi in questione tali soluzioni risultano ammissibili per ogni valore $\lambda \geq 0$; infatti:

$$Ax(\lambda) = A\bar{x} + \lambda A\xi \leq A\bar{x} \leq b, \quad \forall \lambda \geq 0,$$

in quanto B è una base primale ammissibile.

Inoltre, il valore della funzione obiettivo in corrispondenza del fascio di soluzioni ammissibili $x(\lambda)$ cresce al crescere di λ:

$$cx(\lambda) = c\bar{x} + \lambda c\xi \to \infty \text{ per } \lambda \to \infty.$$

(P) risulta quindi superiormente illimitato e di conseguenza, per il Teorema Debole della Dualità, (D) risulta vuoto.