RICERCA OPERATIVA (a.a. 2016/17)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di *PL* applicando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito, si discuta se la soluzione ottima duale sia unica, giustificando la risposta.

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & -2 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \end{array}$$

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 2\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$k = \min\{\ i \in N : A_i \bar{x} > b_i\ \} = \min\{\ 3, 4\ \} = 3 \text{ [regola anticiclo di Bland]}$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\theta} = \min\{\ \bar{y}_i / \eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\ \} = 1/2, \quad h = \min\{\ i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i\ \} = 2$$

it. 2) $B = \{1, 3\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad k = 4$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = 1/3, \quad h = 1$$

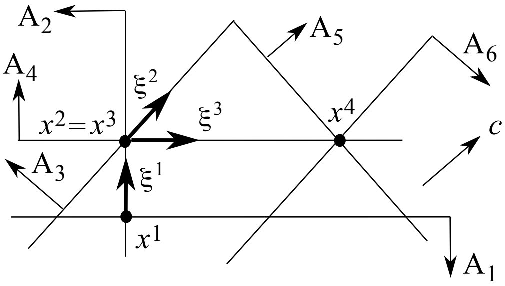
it. 3) $B = \{3, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{STOP.}$$

Poiché la soluzione di base primale è ammissibile, l'algoritmo termina individuando la soluzione ottima primale $\bar{x} = [2, 0]$ e la soluzione ottima duale $\bar{y} = [0, 0, 2/3, 1/3, 0]$. Si osservi che la soluzione ottima primale individuata è degenere, in quanto $I(\bar{x}) = \{2, 3, 4, 5\}$. Aiutandosi con considerazioni di carattere geometrico, si può verificare che il vettore dei costi c è esprimibile come combinazione lineare non negativa dei vettori riga corrispondenti a tali vincoli attivi in infiniti modi. In particolare, c appartiene anche al cono finitamente generato dai vettori A_2 e A_4. Segue che la soluzione ottima duale non è unica.

2) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Si noti che c è collineare ad A_5 e perpendicolare ad A_3 ed A_6, che sono collineari; inoltre anche A_1 ed A_4 sono collineari. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione di base primale x e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, gli indici uscente ed entrante, e la degenerazione primale e duale, giustificando le risposte. Al termine, se il problema ammette ottimo finito, si discuta l'unicità della soluzione ottima determinata, sia primale che duale.

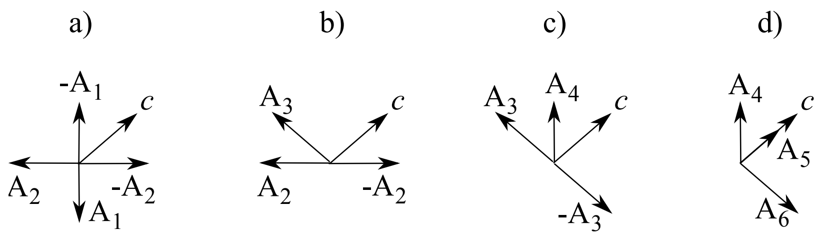


SVOLGIMENTO it. 1) $B = \{1, 2\}$. $y_1 < 0$ e $y_2 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_1$ e $-A_2$, come mostrato in *a*): quindi $h = 1$ per la regola anticiclo di Bland. La soluzione di base primale è non degenere, in quanto $I(x^1) = \{1, 2\} = B$, ed anche duale non degenere perché c è interno al cono generato da $-A_1$ ed $-A_2$, ossia non coincide con nessuno dei due generatori. Il massimo passo lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza sia del vincolo 3 che del vincolo 4: quindi $k = 3$ per la regola anticiclo di Bland.

it. 2) $B = \{2, 3\}$, $y_2 < 0$ e $y_3 > 0$ poiché c appartiene (è interno) al cono generato da $-A_2$ ed A_3, come mostrato in *b*); quindi $h = 2$. La soluzione di base duale è quindi ancora non degenere, mentre è primale degenere in quanto $I(x^2) = \{2, 3, 4\} \supset B$ (esistono vincoli attivi non in base). Il massimo passo lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza del vincolo 4, attivo ma non in base: si compie quindi un passo degenere, e $k = 4$ (il vincolo attivo entra in base).

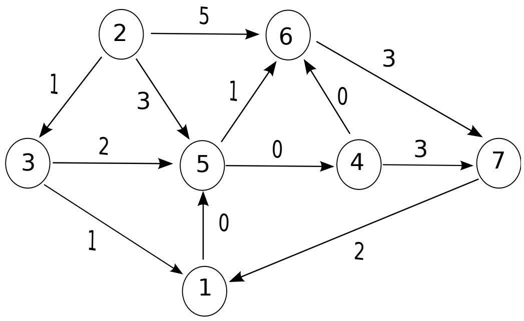
it. 3) $B = \{3, 4\}$, $y_3 < 0$ e $y_4 > 0$ poiché c è interno al cono generato da $-A_3$ e A_4, come mostrato in *c*); quindi,$h = 3$. La soluzione di base primale continua ad essere degenere, mentre quella duale è non degenere. Il massimo passo lungo la direzione ξ^3 si ottiene in corrispondenza sia del vincolo 5 che del vincolo 6: quindi $k = 5$ per la regola anticiclo di Bland.

it. 4) $B = \{4, 5\}$, $y_4 = 0$ e $y_5 > 0$ poiché c è collineare ad A_5, come mostrato in *d*). La base è quindi sia primale che duale ammissibile, e l'algoritmo termina avendo determinato una soluzione ottima per entrambi i problemi. La soluzione di base primale è di nuovo degenere in quanto $I(x^4) = \{4, 5, 6\} \supset B$ (esistono vincoli attivi non in base), ed è anche duale degenere perché c coincide con uno dei due generatori.



Per discutere l'unicità delle soluzioni ottime determinate consideriamo la degenerazione della base ottima ed utilizziamo il teorema degli scarti complementari. Poiché la soluzione di base duale è degenere ($y_4 = 0$), la soluzione ottima del primale potrebbe non essere unica. È facile tuttavia osservare, per via geometrica, che questo non è il caso, ovvero x^4 è l'unica soluzione ottima primale. Per via della degenerazione primale della base ottima, inoltre, la soluzione ottima duale potrebbe non essere unica, ed in effetti questo è il caso. Infatti, come si vede in *d*), c appartiene anche al cono generato da A_4 ed A_6: esiste quindi una soluzione duale ammissibile, in scarti complementari con x^4, tale che $y_5 = 0$, $y_4 > 0$ e $y_6 > 0$, e che è quindi diversa dalla soluzione ottima duale determinata dall'algoritmo.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 2 sul grafo in figura.



Si utilizzi l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.

Nel caso in cui il costo dell'arco $(4, 6)$ fosse un parametro reale ϵ (anzichè valere 0, come in figura), per quali valori di tale parametro l'albero individuato al passo precedente continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 2? E per quali valori di ϵ l'albero ottimo determinato sarebbe unico? Giustificare le risposte.

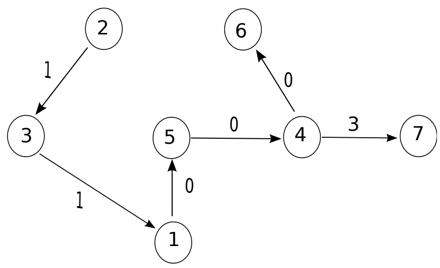
SVOLGIMENTO

Il grafo contiene il ciclo $(1, 5, 6, 7)$ e non sono presenti archi di costo negativo. Pertanto, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.S, che ha complessità in tempo $O(n^2)$ nel caso in cui la coda di priorità Q sia implementata come una lista.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 6 \times 5 + 1 = 31$.

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	Q
0		2	*nil*	2	2	2	2	2	31	0	31	31	31	31	31	(2)
1	2	2	*nil*	2	2	2	2	2	31	0	1	31	3	5	31	$(5, 3, 6)$
2	3	3	*nil*	2	2	2	2	2	2	0	1	31	3	5	31	$(1, 5, 6)$
3	1	3	*nil*	2	2	1	2	2	2	0	1	31	2	5	31	$(5, 6)$
4	5	3	*nil*	2	5	1	5	2	2	0	1	2	2	3	31	$(4, 6)$
5	4	3	*nil*	2	5	1	4	4	2	0	1	2	2	2	5	$(6, 7)$
6	6	3	*nil*	2	5	1	4	4	2	0	1	2	2	2	5	(7)
7	7	3	*nil*	2	5	1	4	4	2	0	1	2	2	2	5	$\emptyset$

L'albero trovato è mostrato in figura:



Se il costo dell'arco $(4, 6)$ fosse pari a un parametro reale ϵ, l'etichetta finale del nodo 6 diventerebbe $2+\epsilon$. L'albero in figura continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 2 per tutti e soli i valori di ϵ che garantiscono il soddisfacimento delle condizioni di ottimalità di Bellman, ovvero per tutti e soli i valori di ϵ per cui gli archi esterni all'albero, ed incidenti il nodo 6, continuano a soddisfare tali condizioni. Ciò si verifica per $0 \leq \epsilon \leq 1$. Per $0 < \epsilon < 1$ le condizioni di Bellman relative agli archi esterni all'albero sono verificare in forma di disuguaglianza. Per $\epsilon = 0$, invece, la condizione vale in forma di uguaglianza per l'arco $(6, 7)$, che quindi può sostituire $(4, 7)$, mentre per $\epsilon = 1$ vale come uguaglianza per l'arco $(5, 6)$, che quindi può sostituire $(4, 6)$. Segue che l'albero determinato è l'unico albero dei cammini minimi di radice 2 per $0 < \epsilon < 1$.

4) Si consideri il seguente modello matematico:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \min\{\, 4x_1 - x_2 \,,\, x_1 + x_2 - x_3 \,\} \\
& x_1, x_3 \in \{0,1\} \\
& x_1 = 1 \Longrightarrow 5 \le x_2 \le 11 \\
& x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = 0 \\
& x_1 = 1 \textit{ and } x_3 = 1 \Longrightarrow x_2 = 8
\end{aligned}
$$

Utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso, lo si formuli come un problema di Programmazione Lineare Intera (*PLI*). Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Il modello matematico proposto non è un modello di *PLI* in quanto:

- la funzione obiettivo non è lineare (bensì è definita come il minimo di due funzioni lineari);
- la variabile x_2 è una variabile caratterizzata da minima quantità prefissata positiva;
- sono presenti implicazioni logiche che legano la variabile x_2 ai valori assunti dalle variabili binarie x_1 e x_3.

Il modello può comunque essere (ri)formulato in termini di modello *PLI* nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z \\
& z \le 4x_1 - x_2 \\
& z \le x_1 + x_2 - x_3 \\
& 5x_1 \le x_2 \le 11x_1 \\
& x_2 \ge 8(x_1 + x_3 - 1) \\
& x_2 \le 8(3 - x_1 - x_3) \\
& x_1, x_3 \in \{0,1\}.
\end{aligned}
$$

La variabile di soglia z, infatti, permette di stimare per difetto il minimo tra i valori restituiti dalle funzioni lineari $4x_1 - x_2$ e $x_1 + x_2 - x_3$. Massimizzando z, il solutore attribuisce pertanto a x_1, x_2 e x_3 quei valori (ammissibili) che massimizzano il minimo valore restituito dalle due funzioni lineari.

La variabile x_1 è inoltre utilizzata per definire x_2 come variabile con minima quantità prefissata positiva, secondo le tecniche di modellazione apprese durante il corso. Infatti, se $x_1 = 1$, la variabile x_2 varia in $[5, 11]$, come richiesto. Se invece $x_1 = 0$, allora x_2 viene forzata a zero, come specificato. Infine, gli ultimi due vincoli del modello *PLI* garantiscono che, se $x_1 = x_3 = 1$, allora la variabile ausiliaria x_2 sia forzata ad assumere il valore 8. Si noti che, in corrispondenza degli altri valori binari attribuibili a x_1 e a x_3, i vincoli in questione risultano ridondanti, e quindi ininfluenti.

5) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{rrrrrrcl} \max 6x_1 & +11x_2 & +5x_3 & +5x_4 & +2x_5 & +x_6 & & \\ 3x_1 & +5x_2 & +3x_3 & +4x_4 & +2x_5 & +2x_6 & \leq & 16 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi inoltre se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si discuta infine se la soluzione ottima determinata resterebbe ottima anche nel caso di capacità dello zaino pari a 15, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. Le variabili non sono ordinate per Costo Unitario Decrescente (CUD). L'ordine CUD è: x_2, x_1, x_3, x_4, x_5, x_6.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [1, 1, 1, 1, 1/2, 0]$, $\bar{z} = 28$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 1, 0, 0]$, $\underline{z} = 27$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, si aggiorna $z = 27$. Siccome $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_5.

$\boxed{x_5 = 1}$ $x^* = [1, 1, 1, 3/4, 1, 0]$, $\bar{z} = 27 + 3/4$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 25$. Poiché $\underline{z} = 25 < z = 27$, z non cambia. Si osservi inoltre che, essendo tutti i parametri interi, la valutazione superiore $\bar{z}$ può essere arrotondata per difetto al valore 27. Pertanto, poiché $\bar{z} = 27 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_5 = 0}$ $x^* = [1, 1, 1, 1, 0, 1/2]$, $\bar{z} = 27 + 1/2$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 1, 0, 0]$, $\underline{z} = 27$. Poiché $\underline{z} = 27 = z$, z non cambia. Si osservi inoltre che, essendo tutti i parametri interi, la valutazione superiore $\bar{z}$ può essere arrotondata per difetto al valore 27. Pertanto, poiché $\bar{z} = 27 = \underline{z}$, il nodo viene chiuso per ottimalità (come pure dalla valutazione superiore).

Poiché Q è vuota, l'algoritmo Branch&Bound termina, restituendo la soluzione ottima $[1, 1, 1, 1, 0, 0]$, di costo 27. Tale soluzione è ammissibile anche nel caso in cui la capacità dello zaino sia 15. Poiché il problema di zaino risolto mediante l'algoritmo Branch&Bound è un rilassamento del problema di zaino con capacità pari a 15, e poiché la soluzione ottima di tale rilassamento è ammissibile per il problema originario, e la funzione obiettivo è invariata, segue che la soluzione $[1, 1, 1, 1, 0, 0]$ è ottima anche per lo scenario con capacità 15.

Si osservi che, nel caso in cui, nel corso dell'analisi dei nodi $\boxed{x_5 = 1}$ e $\boxed{x_5 = 0}$, la valutazione superiore $\bar{z}$ non venisse arrotondata per difetto al valore 27, l'algoritmo Branch&Bound genererebbe ulteriori livelli dell'albero di enumerazione prima di dimostrare l'ottimalità della soluzione $[1, 1, 1, 1, 0, 0]$.

6) Si enuncino e si dimostrino le condizioni di ottimalità per il problema di Flusso di Costo Minimo (*suggerimento*: si utilizzi, senza dimostrarlo, il Teorema di Decomposizione dei flussi).

SVOLGIMENTO

Considerando il problema di Flusso di Costo Minimo, valgono le seguenti condizioni necessarie e sufficienti di ottimalità: un flusso ammissibile x è di costo minimo se e solo se non esistono cicli aumentanti rispetto ad x il cui costo sia negativo.

Una delle implicazioni è ovvia: se esistesse un ciclo aumentante C rispetto ad x il cui costo $c(C)$ è negativo, allora x non sarebbe ottimo, in quanto per ogni $0 < \theta \leq \theta(C, x)$ il flusso $x(\theta) = x \oplus \theta C$ sarebbe ammissibile, con $cx(\theta) = cx + \theta c(C) < cx$.

Per quanto concerne l'altra implicazione, sia x un flusso ammissibile tale che non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto ad x, e sia x' un qualsiasi flusso ammissibile diverso da x. Possiamo allora invocare il *Teorema di Decomposizione dei flussi*, il cui enunciato è il seguente:

Siano dati due flussi ammissibili qualsiasi x ed x': allora esistono $k \leq m$ cicli aumentanti rispetto a x, $C_1, \ldots, C_k$, tali che $x' = x \oplus \theta_1 C_1 \oplus \ldots \oplus \theta_k C_k$, dove $0 < \theta_i \leq \theta(C_i, x)$, $i = 1, \ldots k$.

Se ne deduce che:

$$cx' = cx + \theta_1 c(C_1) + \ldots + \theta_k c(C_k)$$

per qualsiasi flusso ammissibile x' diverso da x, dove $\theta_i > 0$ per ogni i. L'ipotesi che non esistano cicli aumentanti di costo negativo rispetto ad x implica che $c(C_i) \geq 0$ per ogni i, e quindi $cx' \geq cx$ per ogni flusso ammissibile x' diverso da x. Segue che x è un flusso di costo minimo.

Si è pertanto dimostrato che un flusso x è ottimo se e solo se non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto ad x.