RICERCA OPERATIVA (a.a. 2017/18)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & 4x_2 & & \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 10 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & & & \leq & -4 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. In caso di ottimo non finito, qual è la direzione di decrescita illimitata implicitamente individuata dall'algoritmo? Giustificare la risposta.

SVOLGIMENTO

$$\text{it. 1) } B = \{2,3\}\text{: } A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \ \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}, \ \ \bar{y}_N = 0, \ \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$k = \min\{\ i \in N : A_i \bar{x} > b_i\ \} = \min\{\ 4, 5\ \} = 4 \text{ [regola anticiclo di Bland]},$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\theta} = \min\{\ \bar{y}_i / \eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\ \} = 1/2, \quad h = \min\{\ i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i\ \} = 3$$

$$\text{it. 2) } B = \{2,4\}\text{: } A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \ \ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \ \bar{x} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \ \ \bar{y}_N = 0, \ \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 7/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad k = 5,$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \ \ \bar{\theta} = 7, \quad h = 2$$

$$\text{it. 3) } B = \{4,5\}\text{: } A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \ \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \end{bmatrix}, \ \ \bar{y}_N = 0, \ \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{\ 1, 3\ \} = 1 \text{ [regola anticiclo di Bland]},$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \end{bmatrix}, \qquad \textit{STOP.}$$

Poichè $\eta_B \leq 0$, il problema duale è inferiormente illimitato, e di conseguenza il problema primale è vuoto. La direzione di decrescita illimitata implicitamente individuata dall'algoritmo è $d = [1\ 0\ 0\ -\eta_B]$. L'algoritmo sceglie infatti un vettore d i cui elementi valgono 0 in corrispondenza degli indici non in base salvo k, in corrispondenza di cui si ha 1, e i cui elementi corrispondenti agli indici in base sono gli elementi del vettore $-\eta_B$. Quindi $d = [1\ 0\ 0\ 2\ 5]$.

2) Si dimostri l'ottimalità della soluzione $\bar{x} = [1, 1]$ per il seguente problema di PL

$$
(P) \qquad \begin{array}{rrcrcr}
\max & 3x_1 & - & x_2 & & \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & 3x_1 & - & x_2 & \leq & 4
\end{array}
$$

discutendone l'unicità, il fatto che sia una soluzione di base e l'eventuale degenerazione. Si individui inoltre l'insieme delle soluzioni ottime del duale di (P). Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Per la coppia asimmetrica di problemi duali

$$
(P) \;\; \max\{\, cx \,:\, Ax \leq b \,\} \qquad\qquad (D) \;\; \min\{\, yb \,:\, yA = c \,,\, y \geq 0 \,\}
$$

il teorema forte della dualità e il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

Proposizione. Una soluzione $\bar{x}$ ammissibile per (P) è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{y}$ ammissibile per (D) complementare a $\bar{x}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verificano le condizioni degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$
\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \ldots, m.
$$

Il duale di (P) è

$$
(D) \qquad \begin{array}{rrcrcrcrcr}
\min & y_1 & & & + & y_3 & + & 4y_4 & & \\
 & -y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & + & 3y_4 & = & 3 \\
 & -y_1 & + & y_2 & - & y_3 & - & y_4 & = & -1 \\
 & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

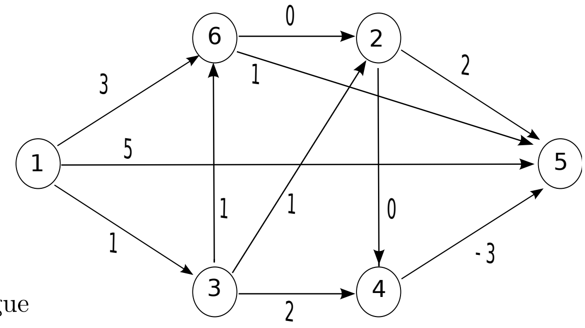
L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{\, i \in \{1, \ldots, m\} \,:\, A_i\bar{x} = b_i \,\} = \{2, 3\}$. Pertanto, essendo le righe A_2 e A_3 linearmente indipendenti, $\bar{x}$ è una soluzione di base; è inoltre ammissibile e non degenere, in quanto $I(\bar{x})$ non contiene altri indici oltre a quelli in base. Una soluzione duale $\bar{y}$ che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare le condizioni $\bar{y}_1 = \bar{y}_4 = 0$. Affinché $\bar{y}$ sia ammissibile per (D) essa deve inoltre soddisfare il sistema

$$
\left\{ \begin{array}{rcrcr}
-y_2 & + & 2y_3 & = & 3 \\
y_2 & - & y_3 & = & -1 \\
y_2 & , & y_3 & \geq & 0
\end{array} \right.
$$

che ammette come unica soluzione $[\bar{y}_2, \bar{y}_3] = [1, 2]$. Pertanto $\bar{x}$ è soluzione ottima di (P), mentre $\bar{y} = [0, 1, 2, 0]$ è l'unica soluzione ottima di (D).

Per discutere l'unicità di $\bar{x}$, osserviamo che $\bar{y} = [0, 1, 2, 0]$ è una soluzione ottima (di base) non degenere per (D). Poiché qualsiasi soluzione ottima di (P) deve verificare le condizioni degli scarti complementari con la soluzione ottima duale $\bar{y}$, e $\bar{x}$ è l'unica soluzione primale che soddisfi tali condizioni, possiamo concludere che $\bar{x}$ è l'unica soluzione ottima di (P).

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato). Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Si discuta infine se l'albero individuato sia l'unico albero dei cammini minimi di radice 1.



SVOLGIMENTO

Rinumerando i nodi come segue

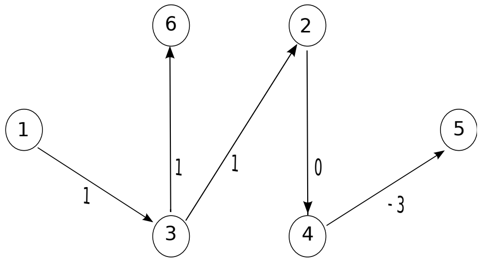
originale	1	2	3	4	5	6
rinumerato	1	4	2	5	6	3

si dimostra che il grafo è aciclico: infatti, per ogni arco (i, j) del grafo rinumerato risulta $i < j$. L'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$ (anche in presenza di archi di costo negativo). Nello svolgimento si fa riferimento alla nuova numerazione dei nodi. Inoltre, non viene riportato Q in quanto non utilizzato da SPT.Acyclic.

$$M = (n-1)\max\{c_{ij} : (i,j) \in A\} + 1 = 5 \times 5 + 1 = 26.$$

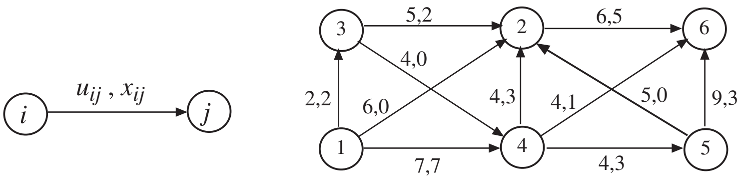
it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$
0		*nil*	1	1	1	1	1	0	26	26	26	26	26
1	1	*nil*	1	1	1	1	1	0	1	3	26	26	5
2	2	*nil*	1	2	2	2	1	0	1	2	2	3	5
3	3	*nil*	1	2	2	2	3	0	1	2	2	3	3
4	4	*nil*	1	2	2	4	3	0	1	2	2	2	3
5	5	*nil*	1	2	2	4	5	0	1	2	2	2	-1

Albero dei cammini minimi individuato (sul grafo originale):



L'albero individuato non è unico. Infatti, l'arco $(6, 2)$ (guardando al grafo originario) soddisfa le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza, e può sostituire l'arco $(3, 2)$ nell'albero restituito dall'algoritmo.

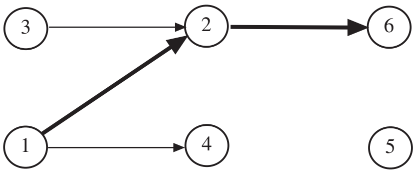
4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso riportato, di valore $v = 9$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità. Si discuta infine come cambierebbero il flusso massimo e il taglio di capacità minima individuati dall'algoritmo se l'arco $(1, 2)$ avesse capacità $u_{12} = 5$.



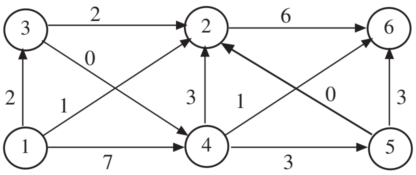
SVOLGIMENTO

Le iterazioni sono illustrate nel seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita ed il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio della quantità $\theta(P, x)$ lungo P, con il relativo valore v. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\})$ determinato, che è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = 6 + 4 + 4 = 14 = v$.

it. 1)

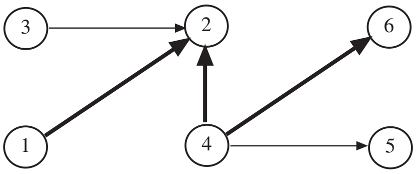


$\theta(P, x) = 1$

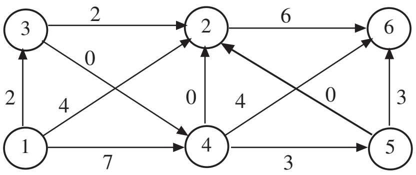


$v = 10$

it. 2)

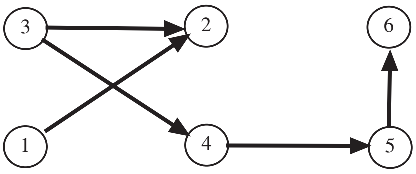


$\theta(P, x) = 3$

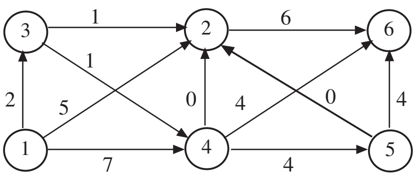


$v = 13$

it. 3)

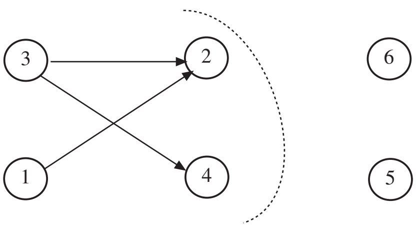


$\theta(P, x) = 1$



$v = 14$

it. 4)



Se l'arco $(1, 2)$ avesse capacità $u_{12} = 5$, le iterazioni eseguite dall'algoritmo rimarrebbero invariate tranne l'ultima, nella quale il taglio determinato sarebbe $(N'_s, N'_t) = (\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\})$, anch'esso di capacità minima $u(N'_s, N'_t) = 14$. Pertanto, il flusso massimo individuato dall'algoritmo sarebbe invariato, mentre cambierebbe il taglio di capacità minima restituito (si noti che (N_s, N_t) è un taglio di capacità minima alternativo).

5) Si consideri il seguente modello matematico:

$$\begin{array}{ll} \min & \max\{\, 2x_1 - x_2 + x_3 \,,\, -x_1 + x_2 + 2x_3 \,\} \\ & x_1, x_3 \in \{0,1\} \\ & x_1 = 1 \Longrightarrow x_2 \in \{2,7,13\} \\ & x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = 0 \\ & x_1 = 1 \textit{ and } x_3 = 1 \Longrightarrow x_2 = 13 \end{array}$$

Utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso, lo si formuli come un problema di Programmazione Lineare Intera (*PLI*). Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Il modello matematico proposto non è un modello di *PLI* in quanto:

- la funzione obiettivo non è lineare (bensì è definita come il massimo di due funzioni lineari);
- la variabile x_2 è una variabile a valori discreti;
- sono presenti implicazioni logiche che legano la variabile x_2 ai valori assunti dalle variabili binarie x_1 e x_3.

Il modello può comunque essere (ri)formulato in termini di modello *PLI* nel modo seguente:

$$\begin{array}{ll} \min & z \\ & z \geq 2x_1 - x_2 + x_3 \\ & z \geq -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ & x_2 = 2y_1 + 7y_2 + 13y_3 \\ & y_1 + y_2 + y_3 = x_1 \\ & y_1, y_2, y_3 \in \{0,1\} \\ & x_1, x_3 \in \{0,1\} \\ & y_3 \geq x_1 + x_3 - 1 \end{array}$$

La variabile di soglia z, infatti, permette di stimare per eccesso il massimo tra i valori restituiti dalle funzioni lineari $2x_1 - x_2 + x_3$ e $-x_1 + x_2 + 2x_3$. Minimizzando z, il solutore attribuisce pertanto a x_1, x_2 e x_3 quei valori (ammissibili) che minimizzano il massimo valore restituito dalle due funzioni lineari.

Le variabili binarie ausiliarie y_1, y_2 e y_3 permettono di formulare la variabile a valori discreti x_2 utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso. Si noti che, se $x_1 = 1$, una di tali variabili deve assumere il valore 1, e pertanto $x_2 \in \{2,7,13\}$, come richiesto. Se invece $x_1 = 0$, il vincolo $y_1 + y_2 + y_3 = x_1$ forza tutte le variabili ausiliarie a zero, e quindi $x_2 = 0$, come specificato. Infine, l'ultimo vincolo del modello *PLI* garantisce che, se $x_1 = x_3 = 1$, allora la variabile ausiliaria y_3 sia forzata ad assumere il valore 1, e quindi x_2 assuma il valore 13, come desiderato.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{lrrrrrcl} \max & 11x_1 & +5x_2 & +5x_3 & +3x_4 & +x_5 & & \\ & 4x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & \leq & 13 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. Le variabili sono già ordinate per Costo Unitario Decrescente.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [1,1,1,2/3,0]$, $\bar{z} = 23$, $\bar{x} = [1,1,1,0,1]$, $\underline{z} = 22$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, si aggiorna $z = 22$. Siccome $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_4.

$\boxed{x_4 = 1}$ $x^* = [1,1,3/4,1,0]$, $\bar{z} = 22 + 3/4$, $\bar{x} = [1,1,0,1,1]$, $\underline{z} = 20$. Poiché $\underline{z} = 20 < z = 22$, z non cambia. Si osservi inoltre che, essendo tutti i parametri interi, la valutazione superiore $\bar{z}$ può essere arrotondata per difetto al valore 22. Pertanto, poiché $\bar{z} = 22 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_4 = 0}$ $x^* = [1,1,1,0,1]$, $\bar{z} = \underline{z} = 22$. Il nodo viene pertanto chiuso per ottimalità (avrebbe potuto anche essere chiuso dalla valutazione superiore).

Poiché Q è vuota, l'algoritmo Branch&Bound termina, restituendo la soluzione ottima $[1,1,1,0,1]$, di costo 22.

Si osservi che, nel caso in cui, nel corso dell'analisi del nodo $\boxed{x_4 = 1}$, la valutazione superiore $\bar{z}$ non venisse arrotondata per difetto al valore 22, l'algoritmo Branch&Bound genererebbe un ulteriore livello dell'albero di enumerazione prima di dimostrare l'ottimalità della soluzione $[1,1,1,0,1]$.