RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di PL

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & -4x_1 & + & 2x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \leq & 6 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

applicando l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base e la loro eventuale degenerazione, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte. Al termine si discuta quali informazioni si possono ricavare riguardo il problema duale del PL dato. Si consideri, inoltre, l'ultima direzione ξ individuata dall'algoritmo: se il vettore dei costi c fosse $[-2, 2]$ invece che $[-4, 2]$, ξ sarebbe ancora di crescita? Giustificare tutte le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{3,4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix} \ , \ \bar{y}_N = 0 \ , \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

[sol. di base primale degenere e duale non degenere] $h = \min\{\, i \in B \,:\, y_i < 0 \,\} = \min\{3, 4\} = 3$, $B(h) = 1$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{\, i \in N \,:\, A_i \xi > 0 \,\} = \{1, 2, 5\}$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i \bar{x})/A_i \xi \ , \ \lambda_1 = 2 \ , \ \lambda_2 = 4 \ , \ \lambda_5 = 0 \ , \ \bar{\lambda} = \min\{\, \lambda_i \,:\, i \in J \,\} = 0$$

$k = \min\{\, i \in J \,:\, \lambda_i = \bar{\lambda} \,\} = 5$ [cambio di base degenere]

it.2) $B = \{4,5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix} \ , \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

[sol. di base primale degenere e duale non degenere] $h = 4$, $B(h) = 1$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$J = \{2\} \ , \ \bar{\lambda} = \lambda_2 = 4 \ , \ k = 2$$

it.3) $B = \{2,5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

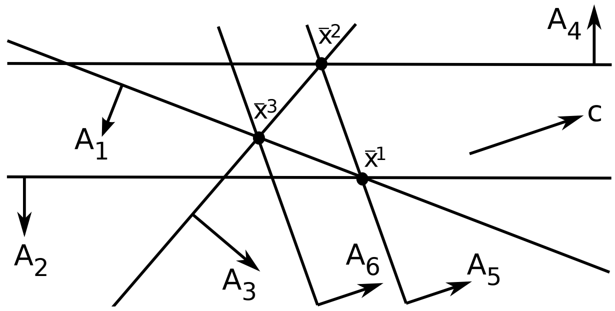
$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \end{bmatrix} \ , \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

[sol. di base primale non degenere e duale non degenere] $h = 5$, $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ J = \emptyset$$

STOP ξ è una direzione di crescita illimitata, pertanto il problema primale è superiormente illimitato e di conseguenza la regione ammissibile del problema duale è vuota. Se il vettore dei costi c fosse $[-2, 2]$ invece che $[-4, 2]$ si avrebbe $c\xi = 0$, e pertanto la direzione ξ non sarebbe di crescita (e neppure di decrescita).

2) Si risolva graficamente il problema di PL in figura utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1, 5\}$; si noti che c, A_5 e A_6 sono collineari, come pure A_2 e A_4. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e η_B e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base determinate. In caso di ottimo finito si discuta l'unicità delle soluzioni primali e duali ottime.



SVOLGIMENTO

it. 1): $B = \{1, 5\}$. La soluzione di base primale $\bar{x}^1$ viola i vincoli 3 e 6, pertanto per la regola anticiclo di Bland

$$k = \min\{\ i \in N\ :\ A_i\bar{x} > b_i\ \} = \min\{\ 3\ ,\ 6\ \} = 3.$$

$\bar{y}_1 = 0$ e $\bar{y}_5 > 0$ in quanto c è collineare ad A_5 e ha lo stesso verso, come mostrato in figura (a). La base è quindi duale degenere, ed è anche primale degenere poiché $B \subset I(\bar{x}^1) = \{\ 1\ ,\ 2\ ,\ 5\ \}$ (anche il vincolo 2 è attivo, pur non essendo in base). Poiché A_3 appartiene al cono finitamente generato da A_1 e A_5, e in particolare è interno, come mostrato in figura (a), risultano $\eta_1 > 0$ e $\eta_5 > 0$. Siccome $\bar{y}_1 = 0$, si ha inoltre $\bar{y}_1/\eta_1 = 0 < \bar{y}_5/\eta_5$, e pertanto:

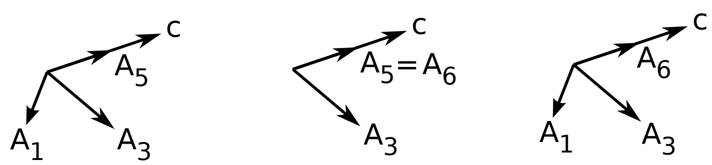
$$\bar{\theta} = \min\{\ \bar{y}_i/\eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\ \} = 0 \quad \text{e} \quad h = \min\{\ i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i/\eta_i\ \} = 1\ \ .$$

Si osservi che la base $B = \{1, 3\}$ non è duale ammissibile, e quindi non avrebbe potuto essere visitata dall'algoritmo.

it. 2): $B = \{3, 5\}$. La soluzione di base primale $\bar{x}^2$ viola il solo vincolo 6, pertanto $k = 6$. $\bar{y}_3 = 0$ e $\bar{y}_5 > 0$ in quanto c è collineare ad A_5, come mostrato in figura (b). La base è quindi duale degenere, e anche primale degenere poiché $B \subset I(\bar{x}^2) = \{\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ \}$ (anche il vincolo 4 è attivo, pur non essendo in base). Poiché A_6 è collineare ad A_5 risultano $\eta_3 = 0$ ed $\eta_5 > 0$, pertanto necessariamente $h = 5$.

it. 3): $B = \{3, 6\}$. La soluzione di base primale $\bar{x}^3$ non viola alcun vincolo, e pertanto è ottima per il problema primale.

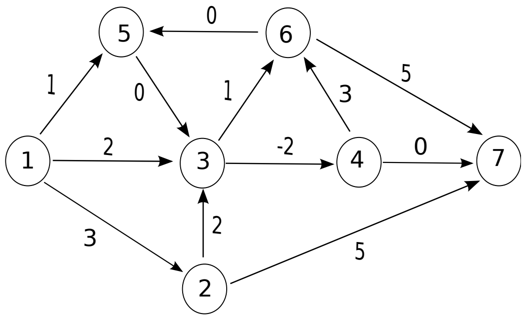
a) b) c)



Per discutere l'unicità delle soluzioni ottime determinate consideriamo la degenerazione della base ottima individuata. Essa risulta duale degenere in quanto c è collineare ad A_6: $\bar{y}_3 = 0$ e $\bar{y}_6 > 0$. Pertanto la soluzione ottima primale potrebbe non essere unica. Infatti, tutti i punti della faccia del poliedro individuato dal vincolo 6, avente un estremo in $\bar{x}^3$ e l'altro nel vertice corrispondente all'intersezione con il vincolo 4, sono ammissibili, e poiché hanno lo stesso valore della funzione obiettivo in $\bar{x}^3$, essi sono anche soluzioni ottime.

La base è anche primale degenere, poiché $B \subset I(\bar{x}^3) = \{\ 1\ ,\ 3\ ,\ 6\ \}$. La soluzione ottima duale potrebbe quindi non essere unica. Invece, nessuna combinazione lineare di A_1, A_3 e A_6 in cui i coefficienti di A_1 ed A_3 siano positivi può coincidere con c, e questo implica che l'unica soluzione ottima duale è quella (di base) in cui sono a zero tutte le variabili tranne $\bar{y}_6$.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1, sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Si esaminino gli archi di ogni stella uscente in ordine crescente dei rispettivi nodi testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Si consideri quindi il caso in cui il costo dell'arco $(4, 7)$ sia un parametro reale ϵ, invece di valere 0, e si discuta l'ottimalità e l'unicità dell'albero determinato al variare di ϵ. Giustificare tutte le risposte.



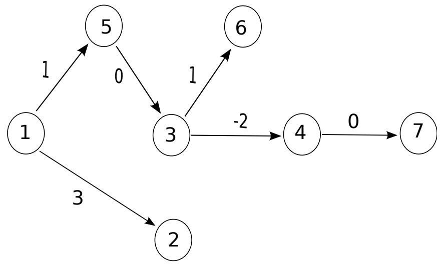
SVOLGIMENTO

Il grafo contiene cicli orientati, ad esempio $(3, 6, 5)$, e archi di costo negativo. Pertanto l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo è SPT.L in cui Q è implementato come una coda, ovvero l'algoritmo di Bellman, che ha complessità in tempo $O(mn)$.

$M = (n - 1)c_{max} + 1 = 6 \times 5 + 1 = 31.$

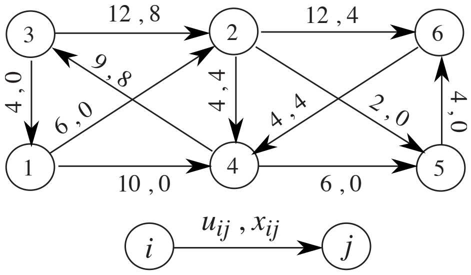
it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	Q
0		*nil*	1	1	1	1	1	1	0	31	31	31	31	31	31	(1)
1	1	*nil*	1	1	1	1	1	1	0	3	2	31	1	31	31	$(2, 3, 5)$
2	2	*nil*	1	1	1	1	1	2	0	3	2	31	1	31	8	$(3, 5, 7)$
3	3	*nil*	1	1	3	1	3	2	0	3	2	0	1	3	8	$(5, 7, 4, 6)$
4	5	*nil*	1	5	3	1	3	2	0	3	1	0	1	3	8	$(7, 4, 6, 3)$
5	7	*nil*	1	5	3	1	3	2	0	3	1	0	1	3	8	$(4, 6, 3)$
6	4	*nil*	1	5	3	1	3	4	0	3	1	0	1	3	0	$(6, 3, 7)$
7	6	*nil*	1	5	3	1	3	4	0	3	1	0	1	3	0	$(3, 7)$
8	3	*nil*	1	5	3	1	3	4	0	3	1	-1	1	2	0	$(7, 4, 6)$
9	7	*nil*	1	5	3	1	3	4	0	3	1	-1	1	2	0	$(4, 6)$
10	4	*nil*	1	5	3	1	3	4	0	3	1	-1	1	2	-1	$(6, 7)$
11	6	*nil*	1	5	3	1	3	4	0	3	1	-1	1	2	-1	(7)
12	7	*nil*	1	5	3	1	3	4	0	3	1	-1	1	2	-1	$\emptyset$

L'albero trovato è mostrato in figura:



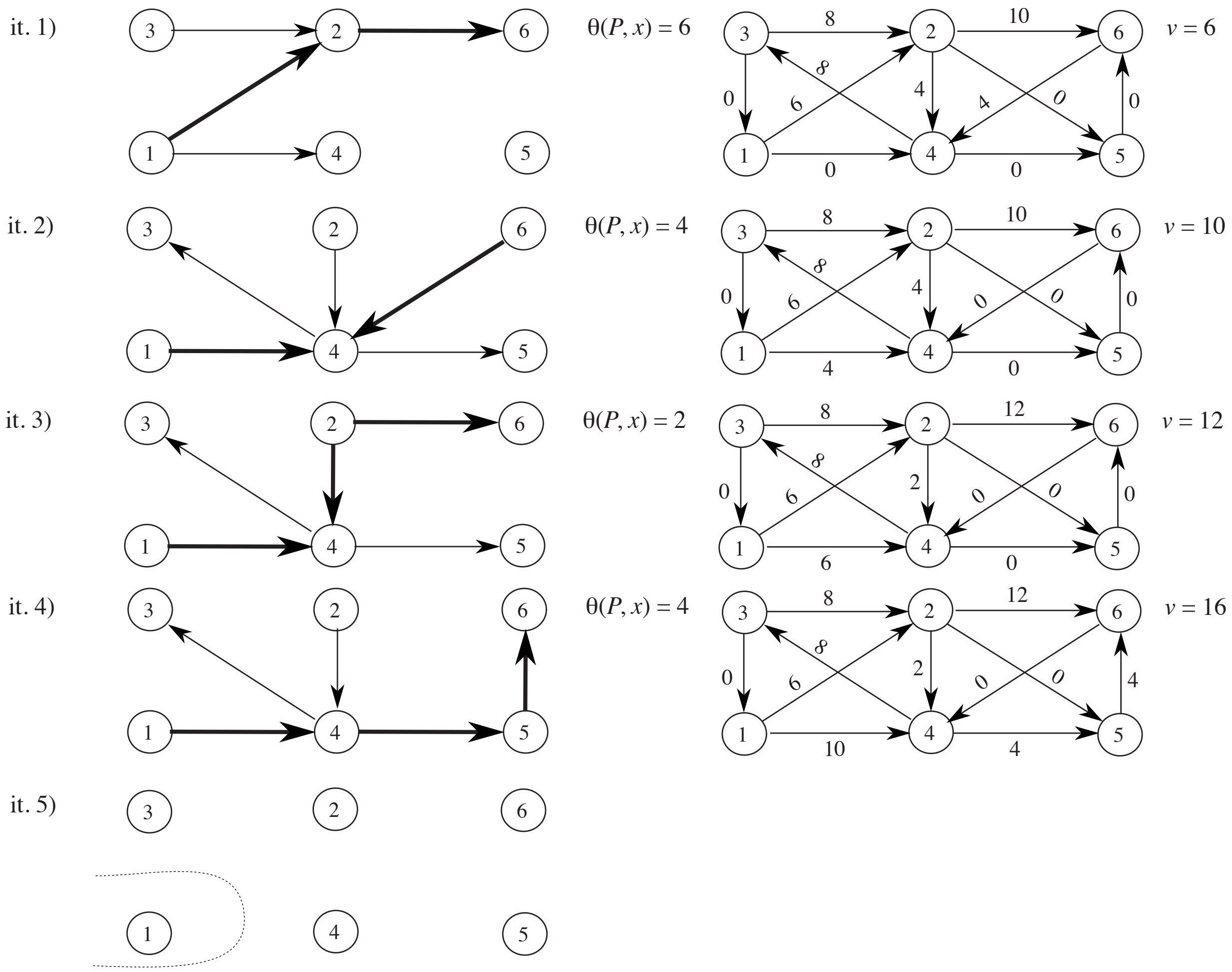
Se il costo dell'arco $(4, 7)$ fosse un parametro reale ϵ, l'etichetta del nodo 7 diverrebbe $d(7) = -1 + \epsilon$. L'albero individuato continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 1 per tutti e soli valori di ϵ per cui le condizioni di Bellman continuano a valere. Ovvero, considerando gli archi non nell'albero incidenti il nodo 7: $d(6) + 5 \geq d(7)$ e $d(2) + 5 \geq d(7)$, quindi per $\epsilon \leq 8$. Si osservi che per $\epsilon = 8$ l'arco $(6, 7)$ potrebbe sostituire $(4, 7)$, ottenendo un albero ottimo alternativo. In ogni modo, l'arco arco $(4, 6)$, non appartenente all'albero, soddisfa le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza indipendentemente dal valore di ϵ. Segue che l'albero individuato non è mai l'unico albero dei cammini minimi di radice 1, a prescindere dal valore assunto dal parametro.

4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato, di valore $v = 0$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, $(1, 2)$ è visitato prima di $(1, 3)$). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine come cambierebbero le risposte finali qualora l'arco $(3, 1)$ cambiasse verso, ossia divenisse $(1, 3)$.



SVOLGIMENTO

Le iterazioni sono rappresentate di seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita e il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio, lungo P, di una quantità di flusso pari alla capacità $\theta(P, x)$, con il relativo valore v. Al termine è riportato il taglio $(\, N_s\, , \, N_t\,) = (\, \{\, 1\, \}\, , \, \{\, 2\, , \, 3\, , \, 4\, , \, 5\, , \, 6\, \}\,)$ determinato dall'algoritmo: i nodi in N_s sono quelli raggiunti durante l'ultima visita del grafo residuo, ovvero la visita in cui si dimostra la non esistenza di un cammino aumentante. Il relativo albero della visita è illustrato nell'ultima figura in basso a sinistra. Il taglio è di capacità minima, infatti $u(\, N_s\, , \, N_t\,) = u_{12} + u_{14} = 6 + 10 = 16 = v$.



Se l'arco $(3, 1)$ cambiasse verso, ossia divenisse $(1, 3)$, il flusso ottimo sarebbe invariato, mentre cambierebbe il taglio di capacità minima. Infatti l'algoritmo, all'ultima iterazione, determinerebbe il taglio $(\, N'_s\, , \, N'_t\,) = (\, \{\, 1\, , 2\, , \, 3\, , \, 4\, , \, 5\, \}\, , \, \{\, 6\, \}\,)$ che ha capacità $u(\, N'_s\, , \, N'_t\,) = u_{26} + u_{56} = 12 + 4 = 16 = v$. Ciò mostra che il taglio $(\, N_s\, , \, N_t\,)$ originariamente determinato non è l'unico taglio di capacità minima.

5) Si consideri la seguente istanza del problema dello zaino binario:

$$\begin{array}{rrrrrrcl} \max 8x_1 & +16x_2 & +7x_3 & +5x_4 & +x_5 & +2x_6 & & \\ 3x_1 & +5x_2 & +3x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +2x_6 & \leq & 15 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

1. Si fornisca sia una valutazione superiore del valore ottimo, risolvendo il rilassamento continuo, che una valutazione inferiore, applicando l'euristica greedy CUD.
2. Si consideri il caso in cui il costo del sesto oggetto sia 1 invece che 2: qual è il valore ottimo dell'istanza modificata?

SVOLGIMENTO

1. Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta risolvendo il rilassamento continuo e con $\bar{x}$ quella ottenuta applicando l'euristica greedy CUD. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore , ovvero $\bar{z} = cx^*$, con $\underline{z}$ la valutazione inferiore, ovvero $\underline{z} = c\bar{x}$. Le variabili non sono ordinate per Costo Unitario Decrescente (CUD). L'ordine CUD è: x_2, x_1, x_3, x_4, x_6, x_5.

   $\boxed{\text{Rilassamento continuo:}}$ $x^* = [1, 1, 1, 1, 0, 1/2]$, $\bar{z} = 37$.

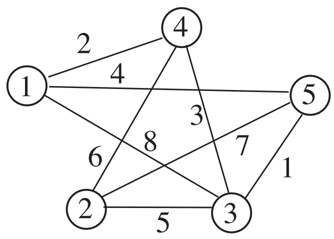
   $\boxed{\text{Euristica greedy CUD:}}$ $\bar{x} = [1, 1, 1, 1, 0, 0]$, $\underline{z} = 36$.

   Poiché $\underline{z} = 36 < \bar{z} = 37$, il valore ottimo dell'istanza data è compreso tra 36 e 37: essendo i costi interi, tale valore ottimo è 36 oppure 37.

2. Se il costo del sesto oggetto fosse 1 invece che 2, l'ordine CUD non cambierebbe. Risolvendo il rilassamento continuo, si otterrebbe una valutazione superiore pari a $36 + 1/2$. Essendo tutti i costi interi, tale valutazione superiore potrebbe essere arrotondata per difetto, ovvero al valore 36. La soluzione ammissibile $\bar{x} = [1, 1, 1, 1, 0, 0]$, di costo $\underline{z} = 36$, risulterebbe pertanto ottima, e quindi 36 sarebbe il valore ottimo dell'istanza modificata.

.

6) Si applichi all'istanza di TSP in figura un algoritmo Branch and Bound che usa 1MST come rilassamento, nessuna euristica, ed effettua il branching selezionando il nodo con il più piccolo valore $r > 2$ di archi dell'1MST in esso incidenti, creando $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali archi. Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore; si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching o se il nodo viene chiuso e perché. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, ossia si implementi Q come una fila. Si visitino solamente i primi 6 nodi dell'albero delle decisioni, compreso il nodo radice. Al termine si riporti la miglior valutazione superiore determinata per il valore ottimo del problema, giustificando tutte le risposte.



SVOLGIMENTO

Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo e con z la migliore delle valutazioni superiori determinate (inizialmente $z = +\infty$). La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ L'1MST, con $\underline{z} = 15$, è mostrato in (a). Non è un ciclo Hamiltoniano, e quindi non si è determinata una soluzione ammissibile. Poiché $\underline{z} = 15 < z = +\infty$ occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 3, che ha tre archi incidenti, e creare 3 figli fissando a zero, rispettivamente, le variabili corrispondenti agli archi $(2,3)$, $(3,4)$ e $(3,5)$.

$\boxed{x_{23} = 0}$ L'1MST, con $\underline{z} = 16$, è mostrato in (b). Poiché $\underline{z} = 16 < z = +\infty$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 4, che ha tre archi incidenti, e creare tre figli, fissando a zero, rispettivamente, le variabili corrispondenti agli $(1,4)$, $(2,4)$ e $(3,4)$.

$\boxed{x_{34} = 0}$ L'1MST, con $\underline{z} = 18$, è mostrato in (c). Poiché si tratta di un ciclo Hamiltoniano, e $\underline{z} = 18 < z = +\infty$, si pone $z = 18$. Inoltre il nodo viene chiuso per ottimalità. Sarebbe stato chiuso anche dalla valutazione inferiore in quanto $\underline{z} = 18 \geq z = 18$.

$\boxed{x_{35} = 0}$ L'1MST, con $\underline{z} = 20$, è mostrato in (d). Poiché $\underline{z} = 20 > z = 18$, il nodo viene chiuso dalla valutazione inferiore.

$\boxed{x_{23} = x_{14} = 0}$ L'1MST, con $\underline{z} = 21$, è mostrato in (e). Poiché $\underline{z} = 21 > z = 18$, il nodo viene chiuso dalla valutazione inferiore.

$\boxed{x_{23} = x_{24} = 0}$ Poiché il nodo 2 ha solamente un arco incidente, non può esistere alcun ciclo Hamiltoniano nel sottografo corrispondente al nodo, e quindi il nodo viene chiuso per inammissibilità.

Poiché sono stati visitati 6 nodi, l'algoritmo viene interrotto. La miglior valutazione superiore determinata è $z = 18$.