

Esercizi sui metodi di iterazione funzionale  
9/5/2008

**Esercizio 1.** È data la funzione

$$f(x) = e^x - 4x^2 + 4.$$

- a) Si dica quante soluzioni ha l'equazione  $f(x) = 0$  e se ne diano degli intervalli di separazione.
- b) Per ognuna delle soluzioni si studi la convergenza del metodo delle tangenti (compresi scelta del punto iniziale ed ordine di convergenza).
- \*c) Si dica se l'equazione

$$x = g(x), \quad \text{con} \quad g(x) = \frac{4 + e^x}{4x}$$

è equivalente all'equazione  $f(x) = 0$  e si studi la convergenza del metodo iterativo  $x_{i+1} = g(x_i)$  ad ognuna delle soluzioni positive.

**Esercizio 2** Si consideri il metodo iterativo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad \text{dove} \quad g(x) = \alpha^2 x^3 - 3\alpha x^2 + 3x,$$

con  $\alpha > 0$ .

- a) Si determinino le soluzioni dell'equazione  $x = g(x)$ .
- b) Il metodo è convergente a tutte le soluzioni? Nei casi di convergenza di determini un punto iniziale.
- c) Si dica quale è l'ordine nel caso di convergenza.
- d) Si indichi quale potrebbe essere l'utilizzazione pratica di questo metodo.

**Esercizio 3** Si consideri l'equazione

$$x^6 + 3x + 1 = 0.$$

- a) Si determini il numero delle soluzioni reali negative dell'equazione.
- b) Per ogni  $x_0 \in \mathbf{R}$ , si studi la convergenza del metodo delle tangenti quando si assuma  $x_0$  come punto iniziale.
- c) Si studi la convergenza del metodo iterativo

$$x_{i+1} = -\frac{x^6 + 1}{3}$$

quando si assuma come punto iniziale un qualsiasi punto  $x_0$  reale.

**Esercizio 4** È data l'equazione  $f(x) = e^x \log x - 1 = 0$ .

- a) Con opportuna separazione grafica, dire quante soluzioni reali ha l'equazione e disegnare il grafico di  $f(x)$ .
- b) Studiare la convergenza del metodo delle tangenti, indicando anche come scegliere il punto iniziale e qual è l'ordine di convergenza.
- c) Dire se l'equazione  $x = g(x)$ , dove  $g(x) = -\log(\log x)$  è equivalente a quella data.
- d) Studiare la convergenza locale del metodo iterativo  $x_{i+1} = g(x_i)$ .

**Esercizio 5** È data l'equazione

$$f(x) = x + 1 - 2\sqrt{x} = 0.$$

- a) Si disegni il grafico della funzione  $f(x)$  e si dica quante soluzioni ha l'equazione e con quale molteplicità.
- b) Si studi la convergenza del metodo delle tangenti.
- c) Si studi la convergenza del metodo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad \text{dove } g(x) = 2\sqrt{x} - 1.$$