

Sistemi di raccomandazione per negozi on-line

I. Sanseverino

Seminario di Elaborazione del Linguaggio Naturale, 2011

Overview

- 1 **Introduzione**
 - Differenze tra shopping online e shopping tradizionale
 - Un caso esplicativo: “Touching the Void”
- 2 **Sistemi di raccomandazione**
- 3 **Tecniche basate su collaborative filtering**
- 4 **Raffinamenti**
 - Evitare l'imputazione
 - Perturbazioni dei dati

Outline

- 1 **Introduzione**
 - Differenze tra shopping online e shopping tradizionale
 - Un caso esplicativo: "Touching the Void"
- 2 Sistemi di raccomandazione
- 3 Tecniche basate su collaborative filtering
- 4 Raffinamenti
 - Evitare l'imputazione
 - Perturbazioni dei dati

Long Tail Distribution

- La popolarità dei prodotti segue una distribuzione di tipo Power Law
- Una piccola percentuale di prodotti è molto richiesta
- La maggioranza è però ricercata da poche persone
- Sono questi prodotti "di nicchia" a rappresentare la maggior parte del mercato

Long Tail Distribution

- La popolarità dei prodotti segue una distribuzione di tipo Power Law
- Una piccola percentuale di prodotti è molto richiesta
- La maggioranza è però ricercata da poche persone
- Sono questi prodotti "di nicchia" a rappresentare la maggior parte del mercato

Negozi Tradizionali

I negozi tradizionali:

- Sono caratterizzati dalla scarsità
 - scarsità di spazio in magazzino
 - scarsità di spazio di esposizione
- si limitano quindi ad esporre i prodotti più popolari

Negozi Online

I negozi online:

- Hanno una quantità quasi illimitata di prodotti
- Ma paradossalmente hanno un minore spazio di esposizione
- Il catalogo è troppo vasto per essere visionato tutto
 - E anche se l'utente avesse voglia di farlo gli mancherebbe il tempo
 - È quindi fondamentale dargli il consiglio giusto

Negozi Online

I negozi online:

- Hanno una quantità quasi illimitata di prodotti
- Ma paradossalmente hanno un minore spazio di esposizione
- Il catalogo è troppo vasto per essere visionato tutto
 - E anche se l'utente avesse voglia di farlo gli mancherebbe il tempo
 - È quindi fondamentale dargli il consiglio giusto

Negozi Online

I negozi online:

- Hanno una quantità quasi illimitata di prodotti
- Ma paradossalmente hanno un minore spazio di esposizione
- Il catalogo è troppo vasto per essere visionato tutto
 - E anche se l'utente avesse voglia di farlo gli mancherebbe il tempo
 - È quindi fondamentale dargli il consiglio giusto

Suggerimenti

Si capisce quindi l'utilità di un buon sistema di raccomandazione:

- Permette all'utente di venire a conoscenza di un prodotto per lui interessante
- Consente al negozio di concludere una nuova transazione
- Rende possibile la diffusione di prodotti non legati a grandi sistemi di distribuzione
- Il tutto funziona solo se non vengono presentate più di 3 - 4 proposte

Suggerimenti

Si capisce quindi l'utilità di un buon sistema di raccomandazione:

- Permette all'utente di venire a conoscenza di un prodotto per lui interessante
- Consente al negozio di concludere una nuova transazione
- Rende possibile la diffusione di prodotti non legati a grandi sistemi di distribuzione
- Il tutto funziona solo se non vengono presentate più di 3 - 4 proposte

Suggerimenti

Si capisce quindi l'utilità di un buon sistema di raccomandazione:

- Permette all'utente di venire a conoscenza di un prodotto per lui interessante
- Consente al negozio di concludere una nuova transazione
- Rende possibile la diffusione di prodotti non legati a grandi sistemi di distribuzione
- Il tutto funziona solo se non vengono presentate più di 3 - 4 proposte

Suggerimenti

Si capisce quindi l'utilità di un buon sistema di raccomandazione:

- Permette all'utente di venire a conoscenza di un prodotto per lui interessante
- Consente al negozio di concludere una nuova transazione
- Rende possibile la diffusione di prodotti non legati a grandi sistemi di distribuzione
- Il tutto funziona solo se non vengono presentate più di 3 - 4 proposte

Outline

- 1 **Introduzione**
 - Differenze tra shopping online e shopping tradizionale
 - Un caso esplicativo: "Touching the Void"
- 2 Sistemi di raccomandazione
- 3 Tecniche basate su collaborative filtering
- 4 Raffinamenti
 - Evitare l'imputazione
 - Perturbazioni dei dati

Esempio

Touching the Void

- Nel 1988 uscì il libro "Touching the Void", ma ebbe scarso successo
- Nel 1997 fu pubblicato un libro simile, "Into Thin Air"
- Il sistema di raccomandazione di Amazon rilevò l'acquisto di entrambi i libri da parte di alcuni utenti
- Cominciò quindi a suggerire il primo a chi comprava il secondo
- "Touching the Void" ebbe una seconda primavera, arrivando col tempo a superare in popolarità anche "Into Thin Air"

Content Filtering

- Si catalogano i prodotti in base alle loro caratteristiche
- Si suggeriscono agli utenti prodotti con caratteristiche simili a quelle di ciò che acquista
- Un ragionamento analogo può essere applicato agli utenti, ma è molto più complicato
 - bisogna sottoporre questionari
 - ma gli utenti sono spesso restii a dare informazioni personali

Content Filtering

- Si catalogano i prodotti in base alle loro caratteristiche
- Si suggeriscono agli utenti prodotti con caratteristiche simili a quelle di ciò che acquista
- Un ragionamento analogo può essere applicato agli utenti, ma è molto più complicato
 - bisogna sottoporre questionari
 - ma gli utenti sono spesso restii a dare informazioni personali

Content Filtering

- Si catalogano i prodotti in base alle loro caratteristiche
- Si suggeriscono agli utenti prodotti con caratteristiche simili a quelle di ciò che acquista
- Un ragionamento analogo può essere applicato agli utenti, ma è molto più complicato
 - bisogna sottoporre questionari
 - ma gli utenti sono spesso restii a dare informazioni personali

Music Genome Project

- Il Music Genome Project di pandora.com è un esempio di grande successo di content filtering.
- L'intero catalogo musicale proposto agli utenti è stato analizzato da esperti di musica
- Le canzoni sono state raggruppate in base ad alcune caratteristiche salienti
- Il beneficio è stato duplice:
 - capire a chi potrebbe piacere una determinata canzone
 - capire quali fattori decretano il successo o meno di una canzone

Limitazioni

- Le tecniche di content filtering sono legate al prodotto che si sta esaminando.
- Le stesse operazioni fatte per il Music Genome Project non avrebbero senso se applicate ad un catalogo di film, o peggio ancora a prodotti totalmente scorrelati come elettrodomestici o abbigliamento
- Inoltre la catalogazione è stata fatta da dei tecnici
 - Il processo potrebbe venir automatizzato in qualche misura, ma la scelta dei parametri del prodotto deve necessariamente essere fatta da un umano

Collaborative Filtering

- Le tecniche di collaborative filtering si basano sulla storia di tutti gli utenti per poter formulare suggerimenti
 - Per ogni utente si guarda quali prodotti gli interessano
 - Si cercano utenti a cui piacciono più o meno le stesse cose
 - Tra i prodotti che piacciono agli utenti simili si decide cosa suggerire

Cold Start

È difficile fare raccomandazioni per nuovi utenti (non se ne conoscono ancora i gusti) o per nuovi prodotti (non piacciono ancora a nessuno)

Collaborative Filtering

- Le tecniche di collaborative filtering si basano sulla storia di tutti gli utenti per poter formulare suggerimenti
 - Per ogni utente si guarda quali prodotti gli interessano
 - Si cercano utenti a cui piacciono più o meno le stesse cose
 - Tra i prodotti che piacciono agli utenti simili si decide cosa suggerire

Cold Start

È difficile fare raccomandazioni per nuovi utenti (non se ne conoscono ancora i gusti) o per nuovi prodotti (non piacciono ancora a nessuno)

Collaborative Filtering

- Le tecniche di collaborative filtering si basano sulla storia di tutti gli utenti per poter formulare suggerimenti
 - Per ogni utente si guarda quali prodotti gli interessano
 - Si cercano utenti a cui piacciono più o meno le stesse cose
 - Tra i prodotti che piacciono agli utenti simili si decide cosa suggerire

Cold Start

È difficile fare raccomandazioni per nuovi utenti (non se ne conoscono ancora i gusti) o per nuovi prodotti (non piacciono ancora a nessuno)

Collaborative Filtering

- Le tecniche di collaborative filtering si basano sulla storia di tutti gli utenti per poter formulare suggerimenti
 - Per ogni utente si guarda quali prodotti gli interessano
 - Si cercano utenti a cui piacciono più o meno le stesse cose
 - Tra i prodotti che piacciono agli utenti simili si decide cosa suggerire

Cold Start

È difficile fare raccomandazioni per nuovi utenti (non se ne conoscono ancora i gusti) o per nuovi prodotti (non piacciono ancora a nessuno)

Collaborative Filtering

- Le tecniche di collaborative filtering si basano sulla storia di tutti gli utenti per poter formulare suggerimenti
 - Per ogni utente si guarda quali prodotti gli interessano
 - Si cercano utenti a cui piacciono più o meno le stesse cose
 - Tra i prodotti che piacciono agli utenti simili si decide cosa suggerire

Cold Start

È difficile fare raccomandazioni per nuovi utenti (non se ne conoscono ancora i gusti) o per nuovi prodotti (non piacciono ancora a nessuno)

Metodi del vicino

- Uno dei primi metodi per la ricerca di utenti affini è il metodo del vicino
- Lavora sulla matrice utenti-prodotti
 - Ogni utente è una riga della matrice
 - Si cercano utenti con la minor distanza possibile da quello in esame
- Il calcolo della distanza può avvenire in vari modi
 - distanza coseno
 - distanza di Jaccard
 - coseno normalizzato

Metodi del vicino

- Uno dei primi metodi per la ricerca di utenti affini è il metodo del vicino
- Lavora sulla matrice utenti-prodotti
 - Ogni utente è una riga della matrice
 - Si cercano utenti con la minor distanza possibile da quello in esame
- Il calcolo della distanza può avvenire in vari modi
 - distanza coseno
 - distanza di Jaccard
 - coseno normalizzato

Metodi del vicino

- Uno dei primi metodi per la ricerca di utenti affini è il metodo del vicino
- Lavora sulla matrice utenti-prodotti
 - Ogni utente è una riga della matrice
 - Si cercano utenti con la minor distanza possibile da quello in esame
- Il calcolo della distanza può avvenire in vari modi
 - distanza coseno
 - distanza di Jaccard
 - coseno normalizzato

Ricerca dei Fattori Latenti

- La ricerca dei fattori latenti vuole ovviare alle limitazioni del content filtering
- Sfruttando le informazioni aggregate degli utenti si possono ricavare le “features” di un prodotto senza bisogno di dichiararle esplicitamente
- Sia gli utenti che i prodotti vengono mappati in un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^f , dove f è il numero di features considerato
- Dati i vettori $q_i \in \mathbb{R}^f$ dei prodotti e $u_j \in \mathbb{R}^f$ degli utenti è facile calcolare il rating stimato dell'utente j per il prodotto i :

Definition

$$\tilde{r}_{ij} = q_i^T \cdot u_j$$

Ricerca dei Fattori Latenti

- La ricerca dei fattori latenti vuole ovviare alle limitazioni del content filtering
- Sfruttando le informazioni aggregate degli utenti si possono ricavare le “features” di un prodotto senza bisogno di dichiararle esplicitamente
- Sia gli utenti che i prodotti vengono mappati in un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^f , dove f è il numero di features considerato
- Dati i vettori $q_i \in \mathbb{R}^f$ dei prodotti e $u_j \in \mathbb{R}^f$ degli utenti è facile calcolare il rating stimato dell'utente j per il prodotto i :

Definition

$$\tilde{r}_{ij} = q_i^T \cdot u_j$$

Ricerca dei Fattori Latenti

- La ricerca dei fattori latenti vuole ovviare alle limitazioni del content filtering
- Sfruttando le informazioni aggregate degli utenti si possono ricavare le “features” di un prodotto senza bisogno di dichiararle esplicitamente
- Sia gli utenti che i prodotti vengono mappati in un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^f , dove f è il numero di features considerato
- Dati i vettori $q_i \in \mathbb{R}^f$ dei prodotti e $u_j \in \mathbb{R}^f$ degli utenti è facile calcolare il rating stimato dell'utente j per il prodotto i :

Definition

$$\tilde{r}_{ij} = q_i^T \cdot u_j$$

Ricerca dei Fattori Latenti

- La ricerca dei fattori latenti vuole ovviare alle limitazioni del content filtering
- Sfruttando le informazioni aggregate degli utenti si possono ricavare le “features” di un prodotto senza bisogno di dichiararle esplicitamente
- Sia gli utenti che i prodotti vengono mappati in un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^f , dove f è il numero di features considerato
- Dati i vettori $q_i \in \mathbb{R}^f$ dei prodotti e $u_j \in \mathbb{R}^f$ degli utenti è facile calcolare il rating stimato dell'utente j per il prodotto i :

Definition

$$\tilde{r}_{ij} = q_i^T \cdot u_j$$

SVD

La tecnica di decomposizione ai valori singolari (SVD) di una matrice è una delle più usate per il mapping di utenti e prodotti in \mathbb{R}^f

- La matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ viene trasformata nel prodotto di tre matrici
 - $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$
 - $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ diagonale
 - $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Se la matrice originale aveva rango k , questo prodotto è riscrivibile come somma di k diadi
- Se si sommano solo le prime $f < k$ diadi si ottiene la miglior approssimazione possibile di rango f della matrice di partenza

Limiti di SVD

La fattorizzazione basata su decomposizione ai valori singolari presenta alcuni problemi non marginali:

- la matrice da fattorizzare deve essere completa
- mentre la matrice utenti-prodotti presenta moltissimi buchi

Una delle tecniche più semplici per ovviare a tale problema è quella di non considerare le posizioni vuote

- questo però significa dare un giudizio negativo anziché nullo
- presenta problemi di overfitting

Altrimenti è necessario ricorrere all'imputazione dei dati mancanti

- il che ci porta a lavorare su matrici dense anziché sparse (introducendo problemi di memorizzazione)
- inoltre imputazioni inesatte porterebbero errori al sistema

Outline

- 1 Introduzione
 - Differenze tra shopping online e shopping tradizionale
 - Un caso esplicativo: "Touching the Void"
- 2 Sistemi di raccomandazione
- 3 Tecniche basate su collaborative filtering
- 4 Raffinamenti
 - Evitare l'imputazione
 - Perturbazioni dei dati

Errore quadratico minimo

- Alcuni studi recenti si sono focalizzati sul calcolo della stima del rating basandosi solo sui dati presenti, cercando però di ovviare al problema dell'overfitting.
- Per farlo si ricorre ad un modello regolarizzato
- Non si lavora più sulla fattorizzazione della matrice, bensì si cerca di risolvere un problema di minimo

Definition

$$\min_{q,u} \sum_{ij \in K} (r_{ij} - q_i^T \cdot u_j)^2 + \lambda (\|q_i\|^2 + \|u_j\|^2)$$

K è il training set di cui sono noti i valori esatti del rating

Errore quadratico minimo

- Alcuni studi recenti si sono focalizzati sul calcolo della stima del rating basandosi solo sui dati presenti, cercando però di ovviare al problema dell'overfitting.
- Per farlo si ricorre ad un modello regolarizzato
- Non si lavora più sulla fattorizzazione della matrice, bensì si cerca di risolvere un problema di minimo

Definition

$$\min_{q,u} \sum_{i,j \in K} (r_{ij} - q_i^T \cdot u_j)^2 + \lambda (\|q_i\|^2 + \|u_j\|^2)$$

K è il training set di cui sono noti i valori esatti del rating

Errore quadratico minimo

- Alcuni studi recenti si sono focalizzati sul calcolo della stima del rating basandosi solo sui dati presenti, cercando però di ovviare al problema dell'overfitting.
- Per farlo si ricorre ad un modello regolarizzato
- Non si lavora più sulla fattorizzazione della matrice, bensì si cerca di risolvere un problema di minimo

Definition

$$\min_{q,u} \sum_{i,j \in K} (r_{ij} - q_i^T \cdot u_j)^2 + \lambda (\|q_i\|^2 + \|u_j\|^2)$$

K è il training set di cui sono noti i valori esatti del rating

Errore quadratico minimo

- Alcuni studi recenti si sono focalizzati sul calcolo della stima del rating basandosi solo sui dati presenti, cercando però di ovviare al problema dell'overfitting.
- Per farlo si ricorre ad un modello regolarizzato
- Non si lavora più sulla fattorizzazione della matrice, bensì si cerca di risolvere un problema di minimo

Definition

$$\min_{q,u} \sum_{i,j \in K} (r_{ij} - q_i^T \cdot u_j)^2 + \lambda (\|q_i\|^2 + \|u_j\|^2)$$

K è il training set di cui sono noti i valori esatti del rating

Risoluzione del problema

A questo problema due sono gli approcci principali

- Discesa stocastica del gradiente
 - di facile implementazione
 - rapida da calcolare
- Minimi quadrati alternati
 - altamente parallelizzabile
 - non perde di efficienza se lavora su matrici dense (ad esempio in presenza di feedback implicito)

Minimi quadrati alternati

- Il metodo consiste nel fissare alternativamente q_i e u_j e considerare come variabile solo l'altro vettore
- Così facendo ad ogni passo l'equazione rappresenta una regione convessa
- Il problema è quindi di Programmazione Lineare, per la quale sono stati studiati algoritmi molto efficienti
- Se si hanno a disposizione n macchine si possono calcolare in parallelo n vettori alla volta, perché il calcolo di ognuno non influenza il risultato degli altri

Minimi quadrati alternati

- Il metodo consiste nel fissare alternativamente q_i e u_j e considerare come variabile solo l'altro vettore
- Così facendo ad ogni passo l'equazione rappresenta una regione convessa
- Il problema è quindi di Programmazione Lineare, per la quale sono stati studiati algoritmi molto efficienti
- Se si hanno a disposizione n macchine si possono calcolare in parallelo n vettori alla volta, perché il calcolo di ognuno non influenza il risultato degli altri

Minimi quadrati alternati

- Il metodo consiste nel fissare alternativamente q_i e u_j e considerare come variabile solo l'altro vettore
- Così facendo ad ogni passo l'equazione rappresenta una regione convessa
- Il problema è quindi di Programmazione Lineare, per la quale sono stati studiati algoritmi molto efficienti
- Se si hanno a disposizione n macchine si possono calcolare in parallelo n vettori alla volta, perché il calcolo di ognuno non influenza il risultato degli altri

Minimi quadrati alternati

- Il metodo consiste nel fissare alternativamente q_i e u_j e considerare come variabile solo l'altro vettore
- Così facendo ad ogni passo l'equazione rappresenta una regione convessa
- Il problema è quindi di Programmazione Lineare, per la quale sono stati studiati algoritmi molto efficienti
- Se si hanno a disposizione n macchine si possono calcolare in parallelo n vettori alla volta, perché il calcolo di ognuno non influenza il risultato degli altri

Outline

- 1 Introduzione
 - Differenze tra shopping online e shopping tradizionale
 - Un caso esplicativo: "Touching the Void"
- 2 Sistemi di raccomandazione
- 3 Tecniche basate su collaborative filtering
- 4 Raffinamenti
 - Evitare l'imputazione
 - Perturbazioni dei dati

Feedback implicito

- Il feedback implicito è quello dedotto dai comportamenti dell'utente, senza necessariamente che questi ne sia consapevole
- Si ottiene analizzando i prodotti visionati, quelli su cui si è soffermato per più tempo, tracciano i movimenti del mouse...
- Quando si raccoglie feedback implicito anche l'assenza di un comportamento fornisce informazioni, pertanto la matrice utenti-prodotti così ottenuta risulta essere densa

Feedback implicito

- Il feedback implicito è quello dedotto dai comportamenti dell'utente, senza necessariamente che questi ne sia consapevole
- Si ottiene analizzando i prodotti visionati, quelli su cui si è soffermato per più tempo, tracciano i movimenti del mouse...
- Quando si raccoglie feedback implicito anche l'assenza di un comportamento fornisce informazioni, pertanto la matrice utenti-prodotti così ottenuta risulta essere densa

Feedback implicito

- Il feedback implicito è quello dedotto dai comportamenti dell'utente, senza necessariamente che questi ne sia consapevole
- Si ottiene analizzando i prodotti visionati, quelli su cui si è soffermato per più tempo, tracciano i movimenti del mouse...
- Quando si raccoglie feedback implicito anche l'assenza di un comportamento fornisce informazioni, pertanto la matrice utenti-prodotti così ottenuta risulta essere densa

Pregiudizio

- Certi utenti sono più entusiasti di altri nel dare voti, pertanto bisogna pesare opportunamente i giudizi assoluti
- Inoltre alcuni prodotti si fanno una nomea (positiva o negativa che sia) che influenza i giudizi degli utenti
- Sarebbe quindi opportuno aggiungere il pregiudizio all'equazione del calcolo del rating stimato

Definitions

$$r_{ij} = \mu + p_i + p_j$$

μ è il rating medio dell'oggetto i

p_j è lo scostamento dei rating dell'utente j rispetto alla media

p_i è lo scostamento della media dei voti dell'oggetto i dalla media

Pregiudizio

- Certi utenti sono più entusiasti di altri nel dare voti, pertanto bisogna pesare opportunamente i giudizi assoluti
- Inoltre alcuni prodotti si fanno una nomea (positiva o negativa che sia) che influenza i giudizi degli utenti
- Sarebbe quindi opportuno aggiungere il pregiudizio all'equazione del calcolo del rating stimato

Definitions

$$r_{ij} = \mu + p_i + p_j$$

μ è il rating medio dell'oggetto i

p_j è lo scostamento dei rating dell'utente j rispetto alla media

p_i è lo scostamento della media dei voti dell'oggetto i dalla media

Pregiudizio

- Certi utenti sono più entusiasti di altri nel dare voti, pertanto bisogna pesare opportunamente i giudizi assoluti
- Inoltre alcuni prodotti si fanno una nomea (positiva o negativa che sia) che influenza i giudizi degli utenti
- Sarebbe quindi opportuno aggiungere il pregiudizio all'equazione del calcolo del rating stimato

Definitions

$$r_{ij} = \mu + p_i + p_j$$

μ è il rating medio dell'oggetto i

p_j è lo scostamento dei rating dell'utente j rispetto alla media

p_i è lo scostamento della media dei voti dell'oggetto i dalla media

Pregiudizio

- Certi utenti sono più entusiasti di altri nel dare voti, pertanto bisogna pesare opportunamente i giudizi assoluti
- Inoltre alcuni prodotti si fanno una nomea (positiva o negativa che sia) che influenza i giudizi degli utenti
- Sarebbe quindi opportuno aggiungere il pregiudizio all'equazione del calcolo del rating stimato

Definitions

$$r_{ij} = \mu + p_i + p_j$$

μ è il rating medio dell'oggetto i

p_j è lo scostamento dei rating dell'utente j rispetto alla media

p_i è lo scostamento della media dei voti dell'oggetto i dalla media

Aggiunta dei pregiudizi

L'equazione del calcolo della stima del rating medio considerando i pregiudizi è la seguente:

$$\tilde{r}_{ij} = p_{ij} + (q_i^T \cdot u_j)$$

Anche il problema di minimo deve subire variazioni:

$$\min_{q,u} \sum_{i,j \in K} (r_{ij} - p_{ij} - q_i^T \cdot u_j)^2 + \lambda (\|q_i\|^2 + \|u_j\|^2 + p_i^2 + p_j^2)$$

Aggiunta dei pregiudizi

L'equazione del calcolo della stima del rating medio considerando i pregiudizi è la seguente:

$$\tilde{r}_{ij} = p_{ij} + (q_i^T \cdot u_j)$$

Anche il problema di minimo deve subire variazioni:

$$\min_{q,u} \sum_{i,j \in K} (r_{ij} - p_{ij} - q_i^T \cdot u_j)^2 + \lambda (\|q_i\|^2 + \|u_j\|^2 + p_i^2 + p_j^2)$$

Considerazioni temporali

- I calcoli fatti fin'ora sono statici, ma il tempo gioca un ruolo importante nel calcolo delle raccomandazioni
- Col tempo infatti cambiano sia i gusti che i pregiudizi
- Inoltre eventi reiterati hanno maggior peso di eventi isolati (posso provare un prodotto una volta, ma se lo ricopro allora mi è piaciuto davvero)
- Il rating stimato dovrebbe quindi essere una funzione del tempo:

$$\tilde{r}_{ij}(t) = p(t) + (q_i^T \cdot u_j)$$

$$p(t) = \mu + p_i(t) + p_j(t)$$