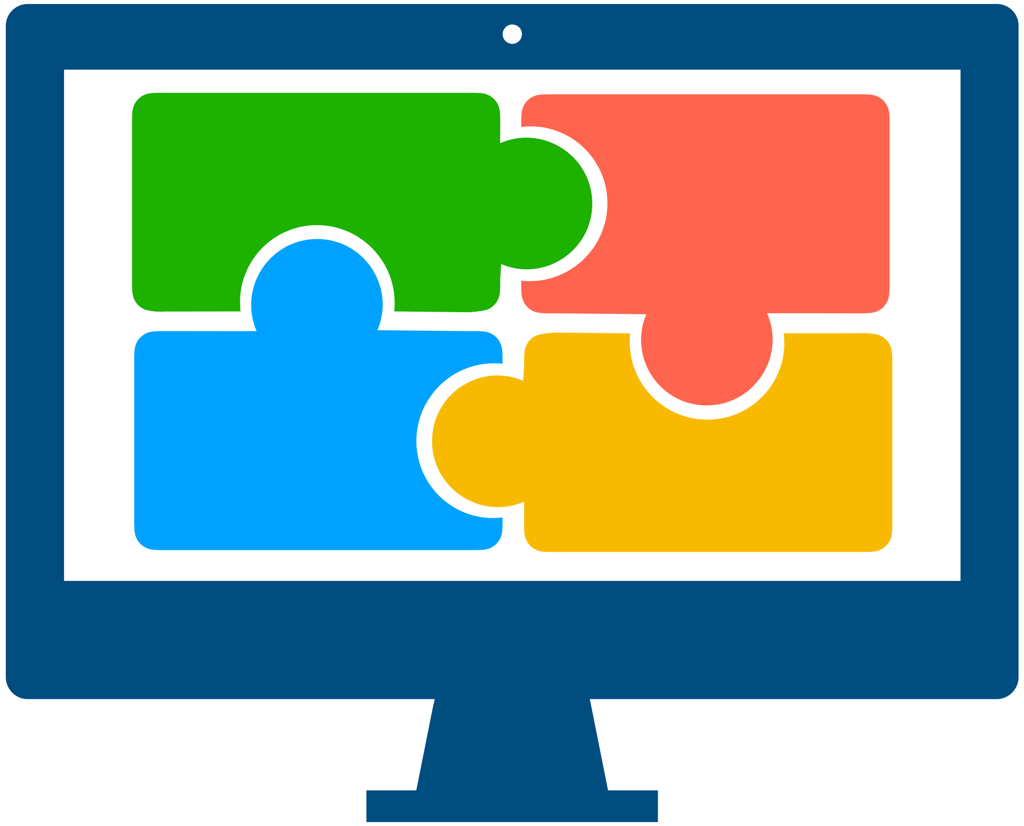


Linguaggi di Programmazione

Roberta Gori

Domini Cartesiani-8.2

HOFL
Verso una semantica denotazione

Imp

3 categorie sintattiche (tipi) $Aexp, Bexp, Com$

una funzione di interpretazione per ciascuno

$$\mathcal{A}[\![\cdot]\!] : Aexp \to \Sigma \to \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{B}[\![\cdot]\!] : Bexp \to \Sigma \to \mathbb{B}$$

$$\mathcal{C}[\![\cdot]\!] : Com \to \Sigma \to \Sigma_\perp$$

$$\Sigma \triangleq Ide \to \mathbb{Z}$$

ambiente

un dominio semantico per ciascuna categoria

valori semantici

significato degli identificatori

sintassi

HOFL

una categoria sintattica per i pretermini T

infiniti tipi $\tau \ ::= \ int \ \mid \ \tau_0 * \tau_1 \ \mid \ \tau_0 \rightarrow \tau_1$

infinite categorie for i termini tipabili T_τ

un dominio semantico per ciascun D_τ

una funzione di interpretazione parametrica $[\![\cdot]\!]$

le variabili hanno tipi diversi $x : \tau$

l'ambiente deve tener conto dei tipi ρ

Requisiti

un dominio per ogni tipo!

$t : \tau \qquad [\![t]\!]\rho \in D_\tau$

ambiente $\qquad \rho : Var \to \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}} D_\tau$

tipo coerente con l'assegnazione di valori alle variabili $\qquad x : \tau \Rightarrow \rho(x) \in D_\tau$

t puo' divergere (es. $\mathbf{rec}\ x.\ x$) $\Rightarrow D_\tau$ deve includere l'elemento bottom $\perp_{D_\tau}$

Requisiti

un dominio per ogni tipo!

$t : \tau \qquad [\![t]\!]\rho \in D_\tau$

ambiente

$$\rho : Var \to \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}} D_\tau$$

tipo coerente con l'assegnazione di valori alle variabili

$$x : \tau \Rightarrow \rho(x) \in D_\tau$$

$$[\![\mathbf{rec}\ x.\ t]\!]\rho = [\![t]\!]\rho[^{[\![\mathbf{rec}\ x.\ t]\!]\rho}/_x] \qquad \Gamma_{x,t} \triangleq \lambda d.\ [\![t]\!]\rho[^d/_x]$$

$$[\![\mathbf{rec}\ x.\ t]\!]\rho = \Gamma_{x,t}\ ([\![\mathbf{rec}\ x.\ t]\!]\rho)$$

$$[\![\mathbf{rec}\ x.\ t]\!] = \mathit{fix}\ \Gamma_{x,t}$$

per risolvere equazioni ricorsive:

D_τ deve essere $\mathrm{CPO}_\perp$

$\Gamma_{x,t}$ deve essere continua

Requisiti

un dominio per ogni tipo!

$t : \tau$ $\quad$ $[\![t]\!]\rho \in D_\tau$

ambiente

$$\rho : Var \to \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}} D_\tau$$

tipo coerente con l'assegnazione di valori alle variabili

$$x : \tau \Rightarrow \rho(x) \in D_\tau$$

$$\tau \ ::= \ int \ \mid \ \tau_0 * \tau_1 \ \mid \ \tau_0 \to \tau_1$$

dobbiamo essere in grado di combinare $\mathrm{CPO}_\perp$

usando il prodotto cartesiano e gli spazi funzionionali

Requisiti

un dominio per ogni tipo!

$t : \tau \qquad [\![t]\!]\rho \in D_\tau$

ambiente

$$\rho : Var \to \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}} D_\tau$$

tipo coerente con l'assegnazione di valori alle variabili $\quad x : \tau \Rightarrow \rho(x) \in D_\tau$

$$\tau \; ::= \; int \;\mid\; \tau_0 * \tau_1 \;\mid\; \tau_0 \to \tau_1$$

scegliamo D_{int}

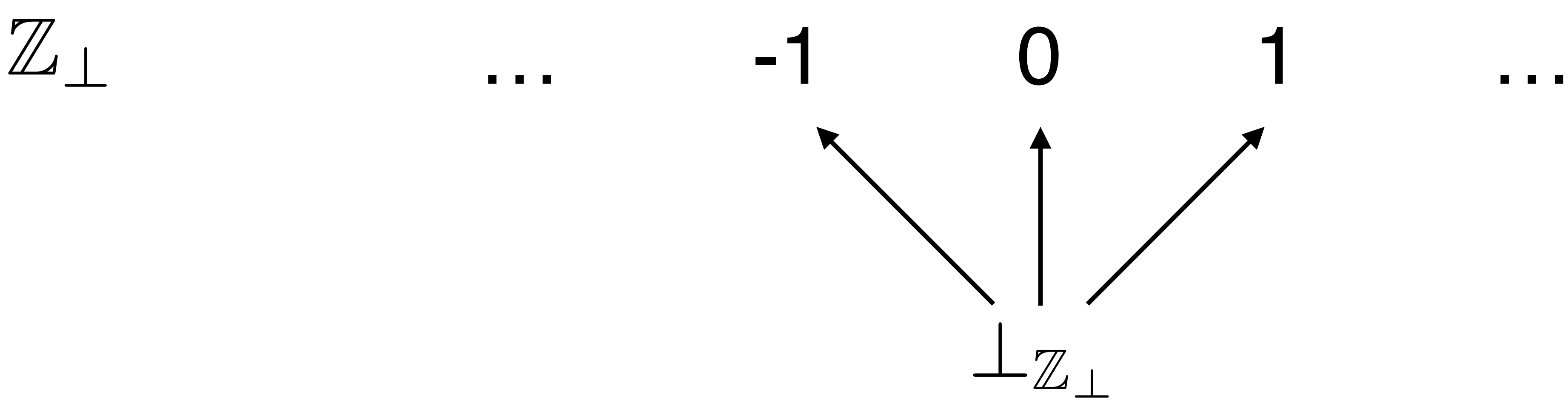
dato $\; D_{\tau_0}, D_{\tau_1} \;$ costruiamo $\; D_{\tau_0 * \tau_1} \;\; D_{\tau_0 \to \tau_1}$

Il dominio flat degli Interi

Il dominio flat degli interi

$\mathbb{Z}$ … -1 0 1 …

Il dominio flat degli interi



PO: ordine flat

bottom: qualsiasi ordine piatto ha il bottom

completezza: qualsiasi ordine piatto è completo
(sono possibili solo catene finite)

Estensioni strict

$$\mathsf{op} \in \{+, - \times\}$$

$$\mathsf{op} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$\underline{\mathsf{op}}_{\perp} : \mathbb{Z}_{\perp} \times \mathbb{Z}_{\perp} \to \mathbb{Z}_{\perp}$$

$$1 \;\underline{+}_{\perp}\; \perp = \perp$$

$$\perp \;\underline{\times}_{\perp}\; 5 = \perp$$

$$\perp \;\underline{-}_{\perp}\; \perp = \perp$$

$$v_1 \;\underline{\mathsf{op}}_{\perp}\; v_2 \triangleq \begin{cases} v_1 \;\underline{\mathsf{op}}\; v_2 & \text{if } v_1, v_2 \in \mathbb{Z} \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise } (v_1 = \perp_{\mathbb{Z}_\perp} \text{ or } v_2 = \perp_{\mathbb{Z}_\perp}) \end{cases}$$

chiamate estensioni *strict*

da dimostrare: $\underline{\mathsf{op}}_{\perp}$ e' monotono e continuo

e' $\mathbb{Z}_{\perp} \times \mathbb{Z}_{\perp}$ un $\mathrm{CPO}_{\perp}$?

Domini di prodotti cartesiani

Prodotto cartesiano

$$\mathcal{D} = (D, \sqsubseteq_D)$$
$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq_E)$$
$$\text{CPO}_\perp \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D} \times \mathcal{E} = (\ D \times E\ ,\ \sqsubseteq_{D \times E}\ )$$

come sono ordinate le coppie?

$$(d_0, e_0) \sqsubseteq_{D \times E} (d_1, e_1) \quad \text{iff} \quad d_0 \sqsubseteq_D d_1 \wedge e_0 \sqsubseteq_E e_1$$

esempio $\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp$

$$(0, 1) \stackrel{?}{\sqsubseteq}_{\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp} (1, 2)$$
$$(\perp_{\mathbb{Z}_\perp}, 1) \stackrel{?}{\sqsubseteq}_{\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp} (1, 1)$$
$$(2, \perp_{\mathbb{Z}_\perp}) \stackrel{?}{\sqsubseteq}_{\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp} (2, 0)$$
$$(0, \perp_{\mathbb{Z}_\perp}) \stackrel{?}{\sqsubseteq}_{\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp} (\perp_{\mathbb{Z}_\perp}, 0)$$

CPO cartesiano

$$\mathcal{D} \times \mathcal{E} = (\ D \times E\ ,\ \sqsubseteq_{D \times E}\ )$$

e' un ordine parziale?

riflessività, antisimmetria, transitività di $\sqsubseteq_{D \times E}$
seguono immediatamente da quelle di $\sqsubseteq_D$ $\sqsubseteq_E$

ha l'elemento bottom?

sia $\perp_{D \times E} = (\perp_D, \perp_E)$

consideriamo ogni coppia $(d, e) \in D \times E$

dal momento che $\perp_D \sqsubseteq_D d$ $\perp_E \sqsubseteq_E e$ allora $\perp_{D \times E} = (\perp_D, \perp_E) \sqsubseteq_{D \times E} (d, e)$

CPO cartesiano (con.)

$$\mathcal{D} \times \mathcal{E} = (\ D \times E\ ,\ \sqsubseteq_{D \times E}\ )$$

e' completo?

consideriamo
una catena $\{(d_i, e_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ dobbiamo trovare il suo lub

proviamo che il suo lub e' $\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i, \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \right)$

1. e' un upper bound della catena
2. è minore o uguale di qualsiasi altro upper bound

CPO cartesiano (con.)

$\mathcal{D} \times \mathcal{E} = (\ D \times E \ , \ \sqsubseteq_{D \times E} \ )$ consideriamo una catena $\{(d_i, e_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$

1. $\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i, \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \right)$ e' un upper bound della catena

prendiamo un elemento della catena (d_j, e_j)

abbiamo

$$d_j \sqsubseteq_D \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i$$

$$e_j \sqsubseteq_E \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i$$

quindi $(d_j, e_j) \sqsubseteq_{D \times E} \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i, \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \right)$

CPO cartesiano (con.)

$\mathcal{D} \times \mathcal{E} = (\; D \times E \;, \; \sqsubseteq_{D \times E} \;)$ prendiamo una catena $\{(d_i, e_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$

2. $\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i, \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \right)$ e' il piu' piccolo tra gli upper bounds

prendiamo un upper bound generico (d, e): $\forall i \in \mathbb{N}. \; (d_i, e_i) \sqsubseteq_{D \times E} (d, e)$

per def $\forall i \in \mathbb{N}. \; d_i \sqsubseteq_D d \; \wedge \; \forall i \in \mathbb{N}. \; e_i \sqsubseteq_E e$

ovvero d e' un upper bound di $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

e e' un upper bound di $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow \quad \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \sqsubseteq_D d \qquad \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \sqsubseteq_E e$

quindi $\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i, \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \right) \sqsubseteq_{D \times E} (d, e)$

Cartesiano CPO: recap

$$\mathcal{D} \times \mathcal{E} = (\ D \times E\ ,\ \sqsubseteq_{D \times E}\ )$$

$$(d_0, e_0) \sqsubseteq_{D \times E} (d_1, e_1) \quad \text{iff} \quad d_0 \sqsubseteq_D d_1 \wedge e_0 \sqsubseteq_E e_1$$

$$\bot_{D \times E} \triangleq (\bot_D, \bot_E)$$

$$\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} (d_i, e_i) \triangleq \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i, \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \right)$$

is $\mathbb{Z}_\bot \times \mathbb{Z}_\bot$ a $\mathrm{CPO}_\bot$? ✔

Proiezioni

$$\pi_1 : D \times E \to D \qquad\qquad \pi_2 : D \times E \to E$$

$$\pi_1(d, e) = d \qquad\qquad \pi_2(d, e) = e$$

TH. le proiezioni sono monotone

prova. prendiamo $(d_0, e_0) \sqsubseteq_{D\times E} (d_1, e_1)$

vogliamo provare $\pi_1(d_0, e_0) \sqsubseteq_D \pi_1(d_1, e_1)$

$\pi_2(d_0, e_0) \sqsubseteq_E \pi_2(d_1, e_1)$

$$\pi_1(d_0, e_0) = d_0 \sqsubseteq_D d_1 = \pi_1(d_1, e_1)$$

$$\Uparrow$$

$$(d_0, e_0) \sqsubseteq_{D\times E} (d_1, e_1)$$

il caso di π_2 e' analogo

Proiezioni (con.)

$\pi_1 : D \times E \to D$ $\qquad$ $\pi_2 : D \times E \to E$

$\pi_1(d, e) = d$ $\qquad$ $\pi_2(d, e) = e$

TH. proiezioni sono continue

prova. prendiamo $\{(d_i, e_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$

vogliamo provare $\pi_1\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}}(d_i, e_i)\right) = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_1(d_i, e_i)$

$$\pi_1\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}}(d_i, e_i)\right) = \pi_1\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i, \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} e_i\right) = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_1(d_i, e_i)$$

per def di lub $\qquad$ per def di π_1 $\qquad$ per def di π_1

il caso di π_2 e' analogo

Esercizio: smashed prod

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{D} = (D, \sqsubseteq_D) \\ \mathcal{E} = (E, \sqsubseteq_E)\end{array}\right. \quad \mathrm{CPO}_\perp \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D} \otimes \mathcal{E} = (\ D \otimes E\ ,\ \sqsubseteq_{D \otimes E}\ )$$

$$D \otimes E \triangleq \{(d, e) \mid (d, e) \in D \times E, d = \perp_D \Leftrightarrow e = \perp_E\}$$

come ordiniamo le coppie?

elemento bottom?

e' un ordine completo?